

О. В. Максимович¹, С. В. Лавренчук¹, Т. Я. Соляр²

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ОТВОРІВ ТА ШТАМПА В АНІЗОТРОПНІЙ ПІВПЛОЩИНІ

Розглянуто задачу визначення напружень в анізотропній півплощині з отворами, яка взаємодіє з гладким штампом. Задачу розв'язано на основі модифікованих інтегральних рівнянь, за яких умови на прямолінійній межі півплощини, в тому числі під штампом, задовольняються тотожно. Досліджено напруження біля отворів в ізотропних та анізотропних півплощинах залежно від їх розміщення відносно штампа. Встановлено випадки, коли анізотропія суттєво впливає на напруження біля отворів.

Контактні задачі для ізотропної півплощини, послабленої отворами й тріщинами, розглядали раніше [3, 4]. Вплив анізотропії на концентрацію напружень біля отворів і штампів для композитних матеріалів вивчено недостатньо. Нижче розглянуто задачу визначення напружень в анізотропній півплощині з отворами, яка взаємодіє з гладким штампом.

Для анізотропних матеріалів задачу розв'яжемо на основі модифікованих інтегральних рівнянь, за яких умови на прямолінійній межі півплощини, в тому числі й під штампом, задовольняються тотожно. Аналогічний підхід за методом рядів використовували, досліджуючи плоскі контактні задачі теорії пружності, для ізотропних пластин із отворами [4]. Запропонований тут підхід суттєво спрощує алгоритм розв'язування контактної задачі, оскільки інтегральні рівняння записують тільки на кривих, де розміщені межі отворів.

Формулювання задачі. Розглянемо анізотропну півплощину ($y < 0$), послаблену отворами, межі яких лежать на кривих $L_j, j = 1, \dots, J$. Прийнемо, що півплощина вздовж межі $y = 0$, якщо $a < x < b$ (область L_u), взаємодіє зі штампом, основа якого $y = f(x)$ та межа поза ним (область L_o) вільна від навантаження; дотичні напруження під штампом відсутні; відомі головний вектор S_y та момент M сил, які прикладені до штампа; до межі отворів прикладені зусилля (X_L, Y_L) .

Основні співвідношення. Виходитимемо із комплексних потенціалів Лехніцького $\Phi(z_1), \Psi(z_2)$, де $z_j = x + s_j y$, s_j ($j=1,2$) – корені характеристичного рівняння $\Delta(s) = 0$ з додатною уявною частиною [1], де

$$\Delta(s) = \alpha_{11}s^4 - 2\alpha_{16}s^3 + (2\alpha_{12} + \alpha_{66})s^2 - 2\alpha_{26}s + \alpha_{22}, \quad (1)$$

α_{ij} – пружні сталі, які розглядаються за закон Гука [1]:

$$\varepsilon_x = \alpha_{11}\sigma_x + \alpha_{12}\sigma_y + \alpha_{16}\tau_{xy}, \quad \varepsilon_y = \alpha_{12}\sigma_x + \alpha_{22}\sigma_y + \alpha_{26}\tau_{xy},$$

$$\gamma_{xy} = \alpha_{16}\sigma_x + \alpha_{26}\sigma_y + \alpha_{66}\tau_{xy}.$$

Тут $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ – деформації; $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – напруження.

Розглянемо довільний контур Γ , який належить області D , що займає пластина. Вектори напружень (X, Y) і переміщень (u, v) на цьому контурі визначають за формулами [1]

$$Y = -2\operatorname{Re}[\Phi(z_1)z_1' + \Psi(z_2)z_2'], \quad X = 2\operatorname{Re}[s_1\Phi(z_1)z_1' + s_2\Psi(z_2)z_2'],$$

$$u' = 2\operatorname{Re}[p_1\Phi(z_1)z_1' + p_2\Psi(z_2)z_2'], \quad v' = 2\operatorname{Re}[q_1\Phi(z_1)z_1' + q_2\Psi(z_2)z_2'], \quad (2)$$

де $u' = du/ds, v' = dv/ds$; $p_j = \alpha_{11}s_j^2 - \alpha_{16}s_j + \alpha_{12}$; $q_j = \alpha_{12}s_j - \alpha_{26} + \alpha_{22}/s_j$;

$z_j' = dx / ds + s_j dy / ds$, ds – диференціал дуги на контурі Γ .

Далі введемо в розгляд вектор напружень $q_\Gamma(z) = X + iY$ на контурі Γ , який, використовуючи співвідношення (2), визначатимемо за формулою

$$q_\Gamma = (s_1 - i)z_1' \overline{\Phi(z_1)} + (\overline{s_1 - i})z_1' \Phi(z_1) + (s_2 - i)z_2' \overline{\Psi(z_2)} + (\overline{s_2 - i})z_2' \Psi(z_2). \quad (3)$$

Приймемо, що відомими є вектори (X, Y) і (u, v) на кривій Γ . Тоді зі співвідношень (2) отримаємо [1, 6]:

$$\Phi(z_1) = \frac{-v' + s_1 u' + p_1 X + q_1 Y}{\Delta_1 z_1'}, \quad \Psi(z_2) = \frac{-v' + s_2 u' + p_2 X + q_2 Y}{\Delta_2 z_2'}, \quad (4)$$

де $\Delta_j = \Delta'(s_j)$, $j = 1, 2$.

Інтегральні рівняння задачі. Для побудови загального розв'язку задачі розглянемо спочатку нескінченну пластину з отворами, яка перебуває під дією зусиль на нескінченності та внутрішніх зосереджених сил. Зі співвідношень (4) та теореми Коші для потенціалів Лехніцького маємо інтегральні зображення [5, 6]

$$\begin{aligned} \Phi(z_1) &= \int_L [u' \Phi_1^0(z_1, t_1) + v' \Phi_2^0(z_1, t_1)] ds + \Phi_S(z_1), \\ \Psi(z_2) &= \int_L [u' \Psi_1^0(z_2, t_2) + v' \Psi_2^0(z_2, t_2)] ds + \Psi_S(z_2). \end{aligned} \quad (5)$$

де $L = L_1 + \dots + L_J$,

$$\Phi_j^0(z_1, t_1) = \frac{A_j}{t_1 - z_1}; \quad \Psi_j^0(z_2, t_2) = \frac{B_j}{t_2 - z_2}, \quad j = 1, 2, \quad (6)$$

$$A_1 = -\frac{is_1}{2\pi\Delta_1}; \quad A_2 = \frac{i}{2\pi\Delta_1}; \quad B_1 = -\frac{is_2}{2\pi\Delta_2}; \quad B_2 = \frac{i}{2\pi\Delta_2}. \quad (7)$$

Тут $t_j = \xi + s_j \eta$, $(\xi, \eta) \in L$ – точка, за якою інтегрують, ds – диференціал дуги на кривій L ; $\Phi_S(z_1), \Psi_S(z_2)$ – потенціали для суцільної пластини, які відповідають прикладеним на нескінченності зусиллям та внутрішнім зосередженим силам.

Модифіковане інтегральне зображення. Розглянемо випадок, коли пружна анізотропна пластинка займає задану область D за однорідних умов на її межі (наприклад, межа вільна від навантажень, або на її частині задані нульові переміщення, а решта – вільна від навантаження). Запишемо інтегральні рівняння для такої пластини з отворами так, щоби умови на межі області D виконувались автоматично. З цією метою спочатку побудуємо комплексні потенціали Лехніцького Φ_j^D, Ψ_j^D ($j = 1, 2$), які є розв'язком задачі теорії пружності для області D з вибраними однорідними умовами на межі, якщо ці функції мають такі особливості в точці з координатами (x_0, y_0) :

$$\Phi_j^D \sim -\frac{A_j}{z_1 - z_{10}}, \quad \Psi_j^D \sim -\frac{B_j}{z_2 - z_{20}}, \quad (8)$$

де $z_{10} = x_0 + s_1 y_0$; $z_{20} = x_0 + s_2 y_0$; $(x_0, y_0) \in D$.

Позначимо ці потенціали через $\Phi_j^D(z_1, T), \Psi_j^D(z_2, T)$, де T – точка з координатами (x_0, y_0) . Тоді загальний розв'язок задачі теорії пружності (потенціали Лехніцького) для області D з отворами набуде вигляду [6]

$$\begin{aligned} \Phi(z_1) &= \int_L [\Phi_1^D(z_1, T)u'(s) + \Phi_2^D(z_1, T)v'(s)] ds + \Phi_D(z_1), \\ \Psi(z_2) &= \int_L [\Psi_1^D(z_2, T)u'(s) + \Psi_2^D(z_2, T)v'(s)] ds + \Psi_D(z_2), \end{aligned} \quad (9)$$

де $\Phi_D(z_1) = \Phi_D^P(z_1) + \Phi_D^\infty(z_1)$; $\Psi_D(z_2) = \Psi_D^P(z_2) + \Psi_D^\infty(z_2)$; T – точка (ξ, η) , за якою інтегрують. Тут потенціали $\Phi_D^\infty, \Psi_D^\infty$ та Φ_D^P, Ψ_D^P – розв'язки задач теорії пружності для області D з однорідними граничними умовами за дії прикладених до пластини на нескінченності зусиль або зосереджених сил.

Потенціали (9) тотожно задовольняють задані умови на межі області D за довільних функцій u', v' .

Підставивши співвідношення (9) у граничні умови, для знаходження невідомих функцій u', v' отримуємо інтегральні рівняння вигляду

$$\int_{\Gamma} [u'(s)Q_1(Z, T) + v'(s)Q_2(Z, T)] ds = Q(Z), \quad Z \in L, \quad (10)$$

де $Q(Z) = Q_L(Z) - Q_D(Z)$; $Q_j(Z, T)$ – вектор напружень q_L у точці Z з координатами (x, y) на кривій L , який визначають за формулою (3) через комплексні потенціали $(\Phi_j^D(z_1, T), \Psi_j^D(z_2, T))$, $j = 1, 2$; $Q_D(Z)$ – вектор напружень, що відповідає потенціалам $(\Phi_D(z_1), \Psi_D(z_2))$, $Q_L = X_L + iY_L$.

Наприклад,

$$Q_j(Z, T) = (s_1 + i)z_1' \Phi_j^D(z_1, T) + (\overline{s_1 + i})z_1' \overline{\Phi_j^D(z_1, T)} + (s_2 + i)z_2' \Psi_j^D(z_2, T) + (\overline{s_2 + i})z_2' \overline{\Psi_j^D(z_2, T)}, \quad j = 1, 2.$$

Крім цього, для забезпечення однозначності переміщень необхідно на невідомі функції накласти умови

$$\int_{L_j} u' ds = 0, \quad \int_{L_j} v' ds = 0, \quad j = 1, \dots, L.$$

Властивості розв'язку (9). Невідомі функції u', v' на кожному з граничних контурів у поданні (9) визначені з точністю до доданків $u' = -\omega_j dy / ds$, $v' = \omega_j dx / ds$, де ω_j – довільні сталі, $j = 1, \dots, J$. Зазначимо, що вони є похідними від переміщень, що виникають за повороту меж пластини як жорсткого цілого. Під час числового розв'язування задачі сталі ω_j , $j = 1, \dots, J$ необхідно фіксувати. Наприклад, для цього можна покласти $u' = 0$ в одній із точок на межі отвору, в якій $dy / ds \neq 0$.

Знайдені зусилля на основі інтегрального зображення (9) на межі кожного з отворів такі, що їх головний вектор та момент тотожно дорівнюватимуть головному вектору та моменту прикладеного зовнішнього навантаження (за довільних невідомих функцій u', v').

Числовий алгоритм розв'язування інтегральних рівнянь. Розглянемо спочатку отвір, коли $L = L_1$. Вважатимемо, що контур L гладкий і заданий параметрично у вигляді $\xi = \alpha(\theta)$, $\eta = \beta(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Поклавши в рівняннях (10) $x = x_v$, $y = y_v$, $v = 1, \dots, N$ та замінивши інтеграли квадратурними формулами [1], отримаємо систему рівнянь вигляду

$$H \sum_{k=1}^N (q_{vk}^{(1)} U_k + q_{vk}^{(2)} V_k) = q_v, \quad v = 1, \dots, N, \quad (11)$$

де $q_{vk}^{(j)} = Q_j(Z_v, T_k)$, $j = 1, 2$; $q_v = Q(Z_v)$; $U_k = u'(s(\theta_k))s_k'$; $V_k = v'(s(\theta_k))s_k'$; T_k – точка з координатами (x_k, y_k) ; Z_v – точки з координатами (x_v, y_v) ; $x_k = \alpha(\theta_k)$; $y_k = \beta(\theta_k)$; $x_v = \alpha(\tau_v)$; $y_v = \beta(\tau_v)$; $\theta_k = Hk$; $\tau_v = \theta_v - H/2$;

$H = 2\pi / N$; $s'_k = s'(\theta_k)$; $s'(\theta) = \sqrt{\alpha'(\theta)^2 + \beta'(\theta)^2}$; N – вибрана кількість вузлових точок на контурі L .

Зі встановлених властивостей розв'язку (9) випливає, що система рівнянь (11) (з точністю до похибок квадратурної формули) є лінійно залежною, тому одне з рівнянь в ній вилучаємо. Решту рівнянь системи запишемо у дійсному вигляді. Тоді одне із рівнянь також лінійно залежне, і його також вилучаємо.

До отриманої неповної системи долучаємо такі три рівняння:

$$\sum_{k=1}^N U_k = 0, \quad \sum_{k=1}^N V_k = 0, \quad U_m = 0, \quad 1 \leq m \leq N. \quad (12)$$

Тут перші два рівняння випливають з умов однозначності переміщень. Останнє отримали після фіксування довільної сталої ω у власному розв'язку так, щоб значення функції $u' = 0$ у вузловій точці з номером m , причому цю точку необхідно вибрати так, щоби в ній $dy/ds \neq 0$. Аналогічно запишемо рівняння вигляду (11) для системи отворів.

Стійким алгоритм розв'язування задачі виявився й тоді, коли до системи рівнянь (11), яка має лінійно залежні рядки, додали ще три рівняння (12). Отриману систему розв'язували за допомогою розроблених для таких випадків (задач з лінійно залежними рівняннями) стандартних комп'ютерних процедур, що ґрунтуються на методі найменших квадратів.

Побудова допоміжних розв'язків Φ_j^D, Ψ_j^D для контактної задачі.

Спочатку розглянемо контактну задачу для суцільної півплощини. Приймемо, що анізотропна суцільна півплощина $y < 0$ контактує в області $L_u (a < x < b)$ з гладким штампом із основою $y = f(x)$, та відомі вертикальна сила S_y та момент M , що прикладені до штампа.

Потенціали Лехніцького для цієї задачі [2]

$$\Phi_c(z) = \frac{s_2}{s_2 - s_1} F(z), \quad \Psi_c(z) = -\frac{s_1}{s_2 - s_1} F(z), \quad (13)$$

де $F(z)$ – аналітична, якщо $y < 0$, функція, причому

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\sigma(\xi) d\xi}{\xi - z}, \quad (14)$$

σ – нормальні контактні напруження (невідомі).

Для визначення контактних напружень отримано [2] інтегральні рівняння, які запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}[\lambda F(x - i0)] &= f'(x), \quad \text{якщо } x \in L_u, \\ \operatorname{Re} F(x - i0) &= 0, \quad \text{якщо } x \in L_\sigma, \end{aligned} \quad (15)$$

де $\lambda = \frac{s_2 q_1 - s_1 q_2}{s_2 - s_1} = \alpha_{22} \frac{s_2 + s_1}{s_1 s_2} - \alpha_{26}$.

Знайдемо функцію $F(z)$ методом лінійного спряження. Для цього продовжимо її, поклавши при $y > 0$: $F(z) = -\bar{F}(z)$. Тоді умови (15) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} F^+ - F^- &= 0, \quad \text{якщо } x \in L_\sigma, \\ F^+ - gF^- &= -f'(x) / \bar{\lambda}, \quad \text{якщо } x \in L_u, \end{aligned}$$

де $g = \lambda / \bar{\lambda}$; $F^\pm = F(x \pm i0)$.

Отримаємо [2]:

$$F(z) = -\frac{1}{2\pi i \lambda X(z)} \int_a^b \frac{f'(t) X^+(t) dt}{t-z} + \frac{S_y}{2\pi i} \frac{1}{X(z)}, \quad (16)$$

де $X(z) = (z-a)^\rho (z-b)^{1-\rho}$; $\rho = \frac{\ln g}{2\pi i}$, причому $X^- = gX^+$, $X^\pm(x) = X(x \pm i0)$.

Напруження під штампом

$$\sigma_y = F^- + \overline{F^-} = F^- - F^+ = \frac{1-g}{g} F^+ + \frac{f'}{\lambda g}. \quad (17)$$

Зокрема, для плоского штампа, коли до нього прикладені сила S_y та момент M , маємо:

$$F(z) = -\frac{\varepsilon}{2\pi i \lambda X(z)} \int_{L_u} \frac{X^+(t) dt}{t-z} + \frac{S_y}{2\pi i X(z)} = -\frac{\varepsilon}{\lambda(1-g)} \left(1 - \frac{z-c_1 a}{X(z)}\right) + \frac{S_y}{2\pi i X(z)}, \quad (18)$$

де ε – невідома дійсна стала (поворот штампа), $c_1 = 1 - 2\rho$

На основі цих потенціалів знаходимо взаємозв'язок між моментом, силою та поворотом штампа:

$$M = -\frac{\varepsilon}{\lambda_2} \pi l^2 (c_2 - c_1^2) + S_y l c_1, \quad (19)$$

де $\lambda_2 = \text{Im} \lambda$, $c_2 = 1 - 2\rho + 2\rho^2$.

Побудова фундаментального розв'язку. Задача побудови функцій Φ_j^D, Ψ_j^D зводиться до знаходження потенціалів $\Phi(z_1), \Psi(z_2)$ для півплощини $y < 0$, що взаємодіє із плоским штампом, які мають особливості

$$\Phi(z_1) \sim \frac{A}{z_1 - c_1}, \quad \Psi(z_2) \sim \frac{B}{z_2 - c_2},$$

коли головний вектор і момент сил, прикладених до штампа, дорівнюють нулю. Тут A, B – довільні сталі, $c_j = z_{j0}$, $j = 1, 2$.

Прийнемо спочатку, що $f' = 0$ та головний вектор сил, прикладених до штампа, дорівнює нулю. Потенціали для цієї задачі зобразимо у вигляді суми:

$$\Phi_*(z) = \Phi_1(z) + \Phi_\Delta(z), \quad \Psi_*(z) = \Psi_1(z) + \Psi_\Delta(z),$$

де Φ_Δ, Ψ_Δ – коригувальний розв'язок,

$$\Phi_1(z) = \Phi_0(z) + \alpha_1 \overline{\Phi_0(z)} + \beta_1 \overline{\Psi_0(z)}, \quad \Psi_1(z) = \Psi_0(z) + \alpha_2 \overline{\Phi_0(z)} + \beta_2 \overline{\Psi_0(z)},$$

$$\Phi_0(z_1) = \frac{A}{z_1 - c_1}, \quad \Psi_0(z_2) = \frac{B}{z_2 - c_2},$$

$$\alpha_1 = \frac{\overline{s_1 - s_2}}{\delta}, \quad \beta_1 = \frac{\overline{s_2 - s_2}}{\delta}, \quad \alpha_2 = \frac{s_1 - \overline{s_1}}{\delta}, \quad \beta_2 = \frac{s_1 - \overline{s_2}}{\delta}, \quad \delta = s_2 - s_1.$$

Зазначимо, що функції Φ_1, Ψ_1 – потенціали для суцільної півплощини з вільною межею, які мають задані особливості [1].

Похідна від нормальних переміщень, що відповідає потенціалам Φ_1, Ψ_1 , якщо $y = 0$, $x \in L_u$, буде $v_1'(x) = R(x)$, де

$$R(x) = 2 \text{Re} [\alpha \Phi_0(x) + \beta \Psi_0(x)] = \frac{A'}{x - c_1} + \frac{B'}{x - c_2} + \frac{\overline{A'}}{x - c_1} + \frac{\overline{B'}}{x - c_2},$$

$$A' = \alpha A, \quad B' = \beta B,$$

$$\alpha = q_1 + \overline{\alpha_1 q_1} + \overline{\alpha_2 q_2} = \Delta_1 \frac{s_2}{s_1 - s_2}, \quad \beta = q_2 + \overline{\beta_1 q_1} + \overline{\beta_2 q_2} = -\Delta_2 \frac{s_1}{s_1 - s_2}.$$

Коригувальні потенціали Φ_Δ, Ψ_Δ визначають з умов при $y = 0$

$$\tau_{xy} = 0, \quad v'(x) = -R(x), \quad \text{якщо } x \in L_u,$$

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad \text{якщо } x \in L_\sigma.$$

Ці потенціали на основі формул (13), (16) такі:

$$\Phi_\Delta(z) = \frac{s_2}{s_2 - s_1} F_\Delta(z), \quad \Psi_\Delta(z) = -\frac{s_1}{s_2 - s_1} F_\Delta(z),$$

$$\text{де } F_\Delta(z) = \frac{1}{2\pi i \lambda X(z)} \int_a^b \frac{R(t) X^+(t) dt}{t - z}.$$

Звідси

$$F_\Delta(z) = \frac{1}{\lambda X(z)} \left[A' W(z, c_1) + B' W(z, c_2) + \overline{A'} W(z, \overline{c_1}) + \overline{B'} W(z, \overline{c_2}) \right],$$

де

$$W(z, c) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{X^+(t) dt}{(t - z)(t - c)} = \frac{1}{1 - g} \left[\frac{X(z) - X(c)}{z - c} - 1 \right].$$

Напруження під штампом запишемо у вигляді

$$\sigma_y(x) = -\frac{1}{g\lambda X^+(x)} \left[A' \left(\frac{X(c_1)}{x - c_1} + 1 \right) + B' \left(\frac{X(c_2)}{x - c_2} + 1 \right) + \overline{A'} \left(\frac{X(\overline{c_1})}{x - \overline{c_1}} + 1 \right) + \overline{B'} \left(\frac{X(\overline{c_2})}{x - \overline{c_2}} + 1 \right) \right].$$

Головні вектор і момент сил під штампом, що відповідають цим напруженням, будуть:

$$S_y = \frac{1}{g\lambda} \left[A' H_0(c_1) + B' H_0(c_2) + \overline{A'} H_0(\overline{c_1}) + \overline{B'} H_0(\overline{c_2}) \right],$$

$$M_y = \frac{1}{g\lambda} \left[A' H_1(c_1) + B' H_1(c_2) + \overline{A'} H_1(\overline{c_1}) + \overline{B'} H_1(\overline{c_2}) \right],$$

де

$$H_j(c) = -\int_a^b \left[\frac{t^j}{X^+(t)} + X(c) \frac{t^j}{X^+(t)(t - c)} \right] dt, \quad j = 0, 1.$$

Враховуючи, що

$$H_0 = 0, \quad H_1 = \frac{2\pi i g}{1 - g} H(c), \quad H(c) = c - X(c) - lc_1,$$

знаходимо: $S_y = 0$;

$$M_y = \frac{2\pi i}{\lambda - \lambda} \left[A' H(c_1) + B' H(c_2) + \overline{A'} H(\overline{c_1}) + \overline{B'} H(\overline{c_2}) \right] = -\frac{\pi}{\lambda_2} 2\text{Re} \left[A' H(c_1) + B' H(c_2) \right].$$

До отриманого розв'язку Φ_* , Ψ_* необхідно додати наведений вище для півплощини, що взаємодіє із плоским штампом, який перебуває під дією моменту $M = -M_y$ та при $S_y = 0$. Тоді потенціали

$$\Phi_2(z) = \frac{s_2}{s_2 - s_1} F_2(z), \quad \Psi_2(z) = -\frac{s_1}{s_2 - s_1} F_2(z),$$

$$\text{де } F_2(z) = -\frac{\varepsilon}{\lambda(1 - g)} \left(1 - \frac{z}{X(z)} \right) = \frac{M_y}{2\pi i l^2 c_2} \left(1 - \frac{z}{X(z)} \right).$$

Тут враховано, що $\varepsilon = \frac{M_y}{\pi l^2 c_2} \lambda_2$.

Беручи до уваги зображення (8), отримуємо:

$$\Phi_j^D = -(\Phi_1 + \Phi_\Delta + \Phi_2)_{A=A_j, B=B_j},$$

$$\Psi_j^D = -(\Psi_1 + \Psi_\Delta + \Psi_2)_{A=A_j, B=B_j}, \quad j = 1, 2.$$

Результати розрахунків. Розглянемо півплощину $y < 0$ з отворами, в яку, якщо $y = 0, -a < x < a$, втискається без тертя плоский штамп. Приймемо, що головний вектор і момент сил, які прикладені до штампа, дорівнюють $S_y = -P$ і $M = 0$. У цьому випадку потенціали $\Phi_D(z_1)$, $\Psi_D(z_2)$, які входять у розв'язок (9), знаходять за формулами (13), де функцію $F(z)$ визначають з виразу (18), якщо $\varepsilon = S_y c_1 \lambda_2 / (\pi a c_2)$. Розрахунки виконано для ізотропного матеріалу та склопластиків CF1 і CF2, механічні характеристики [1] яких наведено в таблиці.

Пружні сталі

Матеріал	E_1 , ГПа	E_2 , ГПа	G_{12} , ГПа	ν_{21}	ν_{12}	E_2 / E_1
CF1	8,62	400	2,8	0,35	0,007	46,40
CF2	15	232	5,02	0,28	0,018	15,47

Розглянемо випадок, коли півплощина послаблена двома круговими отворами радіуса $r = 0,2a$ з центрами в точках із координатами $(\pm a, -1,5r)$.

На рис. 1 наведено результати розрахунків відносних колових напружень $\sigma = a\sigma_\theta / P$ на межі лівого отвору залежно від кутової координати, яку відлічуємо від крайньої правої точки отвору за годинниковою стрілкою. Кривій 1 відповідає ізотропний матеріал, 2 – матеріал CF1, 3 – матеріал CF2.

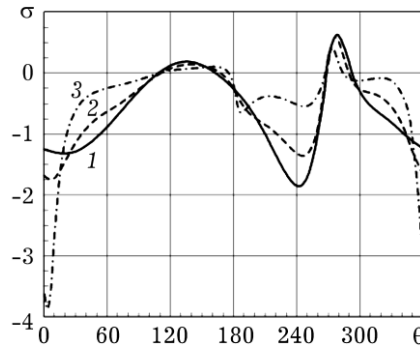


Рис. 1. Відносні напруження на межі лівого отвору.

Із рис. 1 видно, що на межі отворів, розміщених біля кінців штампа, виникають значні стискальні напруження, які виявились найбільшими для матеріалу CF2. На отворах з'являються також розтягальні напруження, які, однак, суттєво менші.

Досліджували напруження на межі отворів залежно від їх розміщення відносно штампа. Для цього розглядали випадок, коли центри отворів розташовано в точках із координатами $(\pm ka, -1,5r)$, якщо $k = 0,8; 0,9; \dots; 1,2$.

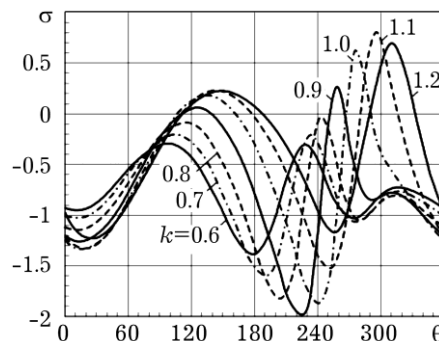


Рис. 2. Відносні напруження на межі лівого отвору.

Розраховані відносні напруження на межі лівого отвору для ізотропного матеріалу наведено на рис. 2, де біля кривих вказано значення k .

Аналогічні результати для матеріалів CF1, CF2 зображено на рис. 3 і 4.

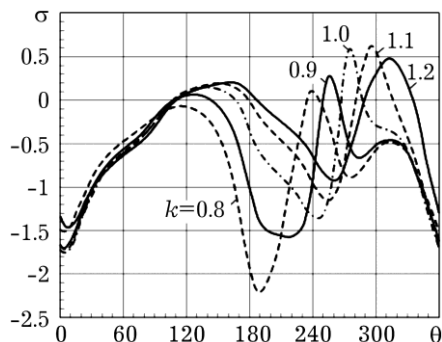


Рис. 3. Відносні напруження на межі лівого отвору, матеріал CF1.

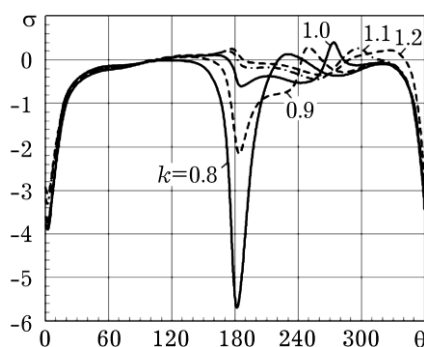


Рис. 4. Відносні напруження на межі лівого отвору, матеріал CF2.

Отже, анізотропія істотно впливає на розподіл напружень біля отворів. Найбільші стискальні напруження виявились біля кругових отворів малих розмірів, розміщених біля кінців штампа й дещо зміщених до його центра. Найвідчутніше анізотропія вплинула на напруження для півплощини з матеріалу CF2. Розтягальні напруження на межі отворів суттєво менші, ніж стискальні.

Висновки. Розроблено алгоритм розрахунку напружень біля отворів в анізотропній півплощині, яка взаємодіє з плоским гладким штампом. Алгоритм базується на методі інтегральних рівнянь, ядра яких побудовано так, що умови на межі півплощини, в тому числі й під штампом, задовольняються тотожно. Досліджено напруження біля отворів залежно від їх розміщення відносно штампа. Встановлено, що анізотропія суттєво їх змінює: найбільші виникають біля отворів, розміщених біля країв штампа.

1. Божидарнік В. В., Максимович О. В. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – 226 с.
2. Галін Л. А. Контактные задачи теории упругости. – Москва: Наука, 1980. – 304 с.
3. Дацлишин О. П., Марченко Г. П. Особливості контактування берегів крайової тріщини за рухомого герцівського навантаження // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2013. – № 5. – С. 23–34.
4. Калосров С. О., Авдюшкіна О. В., Мироненко А. Б. Плоска динамічна осесиметрична задача для порожнистого циліндра. – Донецьк: Донецьк. нац. ун-т, 2013. – 380 с.
5. Максимович О. В. Розрахунок напруженого стану анізотропних пластинок з отворами і криволінійними тріщинами при врахуванні контакту їхніх берегів // Вісник Тернопільськ. держ. техн. ун-ту. – 2009. – № 3. – С. 36–42.

6. Maksymovych O., Pasternak Ia., Sulym H., Kutsyk S. Doubly periodic cracks in the anisotropic medium with the account of contact of their faces // Acta mechanica et automatica. – 2014. – 8, № 3. – P. 160–164.

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ ОТВЕРСТИЙ И ШТАМПА В АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Рассмотрена задача определения напряжений в анизотропной полуплоскости с отверстиями, которая взаимодействует с гладким штампом. Задача решена на основании модифицированных интегральных уравнений, когда условия на прямолинейной границе полуплоскости, в том числе и под штампом, удовлетворяются тождественно. Исследованы напряжения возле отверстий в изотропных и анизотропных полуплоскостях в зависимости от их размещения относительно штампа. Установлены случаи, когда анизотропия существенно влияет на напряжения возле отверстий.

STRESS CONCENTRATION NEAR THE OPENINGS AND PUNCH IN ANISOTROPIC HALF-PLANE

The problem of determination of the stresses in an anisotropic half-plane with openings which interacts with a plane punch is considered. The problem is solved on the basis of the modified integral equations for which the conditions on the rectilinear boundary of the half-plane, under the stamp including, are satisfied identically. The stresses near the openings in isotropic and anisotropic half-planes are studied depending on their location with respect to the punch. The cases when anisotropy influences essentially the stresses near the openings are presented.

¹Луцьк. держ. техн. ун-т, Луцьк

²Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
02.10.16