

РУЙНУВАННЯ ПІВПРОСТОРУ ЗА СТИСКУ ВЗДОВЖ ПРИПОВЕРХНЕВОЇ ДИСКОПОДІБНОЇ ТРІЩИНИ В КОМПОЗИТНИХ ТА ЕЛАСТИЧНИХ МАТЕРІАЛАХ

Вивчено руйнування матеріалу під час стиску вздовж приповерхневої тріщини. Розглянуто осесиметричну задачу для кругової тріщини. Як приклад, числово досліджено еластичні та композитні матеріали за великих та малих відстаней між тріщиною та вільною поверхнею. Отримано критерій застосовності наближених розрахункових схем щодо тонкостінності та умов закріплення.

Руйнування матеріалу під час стиску вздовж тріщин – одна із неklasичних проблем механіки руйнування. Є два підходи для дослідження таких задач [3]. Перший, запропонований у праці [9], ґрунтується на використанні наближених розрахункових схем, коли відокремлені тріщинами (тріщиною та вільною поверхнею) елементи замінують балкою, пластиною або оболонкою. Другий розробив О. М. Гузь [4]. Як критерій руйнування він вжив критерій локальної втрати стійкості матеріалу в околі тріщини в межах тривимірної лінеаризованої теорії пружності [4]. За цим підходом руйнування ініціює момент локальної втрати стійкості матеріалу поблизу тріщин, а критичні параметри стиску визначають з розв'язання відповідних задач на власні значення, використовуючи тривимірну лінеаризовану теорію стійкості деформівних тіл. За ним досліджено багато задач, пов'язаних з руйнуванням еластичних, композитних та пластичних матеріалів під час стиску вздовж тріщин [1–8], а також можна встановити критерії застосовності наближених розрахункових схем.

Формулювання та узагальнений розв'язок задачі. Розглянемо руйнування півпростору з дископодібною тріщиною радіуса a , розміщеною в площині $x_3 = 0$ з центром на осі Ox_3 . Початкові напруження, які діють вздовж тріщини, відповідають двовісному розтягу-стиску [5, 6]:

$$S_{33}^0 = 0; \quad S_{11}^0 = S_{22}^0 \neq 0; \quad u_m^0 = \delta_{jm}(\lambda_j - 1)x_j; \\ \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3; \quad \lambda_j = \text{const},$$

де λ_j – видовження вздовж осей; x_j – лагранжеві координати, які збігаються за недеформованого стану з декартовими; S_{ij}^0 – компоненти симетричного тензора напружень; u_j^0 – переміщення, які відповідають початковим напруженням S_{ij}^0 .

У разі осесиметричної лінеаризованої задачі на берегах тріщини та вільній поверхні виконуються граничні умови

$$t_{33} = 0, \quad x_3 = \pm 0, \quad 0 \leq r < a; \quad t_{3r} = 0, \quad x_3 = \pm 0, \quad 0 \leq r < a; \\ t_{33} = 0, \quad x_3 = -h, \quad 0 \leq r < \infty; \quad t_{3r} = 0, \quad x_3 = -h, \quad 0 \leq r < \infty,$$

де t_{ij} – несиметричний тензор напружень Кірхгофа; (r, θ, x_3) – циліндричні координати, які відповідають декартовим x_j .

Скориставшись запропонованою в працях [5, 6] методикою, задачу для еластичних і композитних матеріалів зводимо до розв'язання системи інтегральних рівнянь Фредгольма з допоміжною умовою

$$\begin{aligned}
f(\xi) + \frac{1}{\pi k} \int_0^1 M_1(\xi, \eta) f(\eta) d\eta - \frac{2}{\pi k} \int_0^1 N_1(\xi, \eta) g(\eta) d\eta &= 0; \\
g(\xi) + \frac{1}{\pi k} \int_0^1 M_2(\xi, \eta) g(\eta) d\eta - \frac{2}{\pi k} \int_0^1 N_2(\xi, \eta) f(\eta) d\eta + \tilde{C}_1 &= 0; \\
\int_0^1 g(\xi) d\xi = 0 \quad (0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1); \quad f(\xi) \equiv \varphi(a\xi); \quad g(\xi) \equiv \psi(a\xi).
\end{aligned} \tag{1}$$

Всі величини у рівняннях (1) безрозмірні; \tilde{C}_1 – невідома константа, пов'язана з допоміжною умовою.

Ядра інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned}
M_1(\xi, \eta) &= R_1(\eta + \xi) - R_1(1 + \xi) + R_1(\eta - \xi) - R_1(1 - \xi), \\
N_1(\xi, \eta) &= S_1(\eta + \xi) + S_1(\eta - \xi), \quad M_2(\xi, \eta) = S_2(\eta + \xi) + S_2(\eta - \xi), \\
N_2(\xi, \eta) &= R_2(\eta + \xi) - R_2(1 + \xi) + R_2(\eta - \xi) - R_2(1 - \xi).
\end{aligned} \tag{2}$$

Функції, що входять в ядра рівнянь (2) для еластичних (нерівні корені характеристичного рівняння [5]) та композитних матеріалів, визначають за формулами

$$\begin{aligned}
R_1(\zeta) &= 2\left\{2 \frac{k_2}{k} I_0(\beta_1 + \beta_2, \zeta) - \frac{1}{2} \frac{(k_1 + k_2)}{k} \left[\frac{k_2}{k_1} I_0(2\beta_2, \zeta) + I_0(2\beta_1, \zeta) \right] \right\}, \\
S_1(\zeta) &= \frac{(k_1 + k_2)}{k} \{I_1(\beta_1 + \beta_2, \zeta) - \frac{1}{2} [I_1(2\beta_1, \zeta) + I_1(2\beta_2, \zeta)]\}, \\
S_2(\zeta) &= 2\left\{2 \frac{k_1}{k_2} I_0(\beta_1 + \beta_2, \zeta) - \frac{1}{2} \frac{(k_1 + k_2)}{k} \left[\frac{k_1}{k_2} I_0(2\beta_2, \zeta) + I_0(2\beta_1, \zeta) \right] \right\}, \\
R_2(\zeta) &= \frac{(k_1 + k_2)}{k} \{I_{-1}(\beta_1 + \beta_2, \zeta) - \frac{1}{2} [I_{-1}(2\beta_1, \zeta) + I_{-1}(2\beta_2, \zeta)]\}, \\
I_0(\rho, \zeta) &= \rho(\zeta^2 + \rho^2)^{-1}, \quad I_{-1}(\rho, \zeta) = -\frac{1}{2\beta} \log(\zeta^2 + \rho^2), \\
I_1(\rho, \zeta) &= \beta(\rho^2 - \zeta^2)(\zeta^2 + \rho^2)^{-2}, \\
\beta &= ha^{-1}, \quad \beta_i = \beta(n_i^0)^{-1/2}, \quad i = 1, 2,
\end{aligned} \tag{3}$$

де k , k_1 , k_2 , n_1 , n_2 – сталі, які залежать від властивостей матеріалу.

Методи дослідження. Використовували числово-аналітичний метод розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма, запропонований у працях [7, 8]. Для пошуку критичних укорочень та напружень застосовували процедуру, побудовану на методі Бубнова–Гальборкіна. Як систему координатних функцій вживали степеневі функції

$$f(x) = \sum_{i=0}^N F_i x^i; \quad g(x) = \sum_{i=0}^N G_i x^i.$$

Це дало можливість використати пакет символічних розрахунків та аналітично визначити інтеграли від функцій (3), збільшивши точність обчислень, оскільки унеможливили похибку числового інтегрування. Щоб пришвидшити обчислення інтегралів, використали алгоритм, який базується на рекурентних співвідношеннях:

$$L(n) = \int_0^1 \frac{x^n}{(a^2 + (x+y)^2)^2} dx,$$

$$L(n) = \frac{1}{n-3} \left(\frac{1}{a^2 + (1+y)^2} - 2y(n-2)L(n-1) - (a^2 + y^2)(n-1)L(n-2) \right),$$

$$V(n) = \int_0^1 \frac{x^n}{(a^2 + (x-y)^2)^2} dx,$$

$$V(n) = \frac{1}{n-3} \left(\frac{1}{a^2 + (1-y)^2} + 2y(n-2)V(n-1) - (a^2 + y^2)(n-1)V(n-2) \right).$$

Скориставшись ними, можна знайти інтеграли від функцій, що входять у формули (3):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^n}{a^2 + (x+y)^2} dx &= \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{a^2 + (1+y)^2} + 2L(n+2) + 2yL(n+1) \right), \\ \int_0^1 \frac{x^n (a^2 - (x+y)^2)^2}{(a^2 + (x+y)^2)^2} dx &= (a^2 - y^2)L(n) - 2yL(n+1) - L(n+2), \\ \int_0^1 x^n \ln(a^2 + (x+y)^2) dx &= \frac{1}{n+1} \left(-\frac{2y}{n+2} \left(\frac{1}{a^2 + (1+y)^2} + 2L(n+3) + 2yL(n+2) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{n+3} \left(\frac{1}{a^2 + (1+y)^2} + 2L(n+4) + 2yL(n+3) \right) + \ln(a^2 + (1+y)^2) \right), \\ \int_0^1 \frac{x^n}{a^2 + (x-y)^2} dx &= \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{a^2 + (1-y)^2} + 2V(n+2) - 2yV(n+1) \right), \\ \int_0^1 \frac{x^n (a^2 - (x-y)^2)^2}{(a^2 + (x-y)^2)^2} dx &= (a^2 - y^2)V(n) + 2yV(n+1) - V(n+2), \\ \int_0^1 x^n \ln(a^2 + (x-y)^2) dx &= \frac{1}{n+1} \left(\frac{2y}{n+2} \left(\frac{1}{a^2 + (1-y)^2} + 2V(n+3) - 2yV(n+2) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{n+3} \left(\frac{1}{a^2 + (1-y)^2} + 2V(n+4) - 2yV(n+3) \right) + \ln(a^2 + (1-y)^2) \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Після підставлення координатних функцій у парні інтегральні рівняння (1), використовуючи (4) для інтегрування ядер інтегральних рівнянь Фредгольма (2), одержали систему з $2N+3$ рівнянь з такою самою кількістю невідомих величин F_i , G_i , \tilde{C}_1 , $i \in [0, N]$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N F_i F_{1ji} + \sum_{i=0}^N G_i G_{1ji} &= 0, \\ \sum_{i=0}^N F_i F_{2ji} + \sum_{i=0}^N G_i G_{2ji} + \tilde{C}_1 &= 0, \\ \sum_{i=0}^N \frac{1}{i+1} G_i &= 0, \quad 0 \leq j \leq N, \end{aligned} \quad (5)$$

де F_{kji} , G_{kji} – точні вирази, пораховані за допомогою пакета символьних розрахунків, які залежать від безрозмірної відстані між тріщиною та вільною поверхнею β , а також сталих величин, залежних від матеріалу.

Числові результати. За запропонованим числово-аналітичним методом можна отримати залежності критичних укорочень та напружень від відстані між тріщиною та вільною поверхнею для різних матеріалів.

Зокрема, для еластичного з потенціалом Трелоара [10] (нерівні корені характеристичного рівняння) коефіцієнти, які входять у рівняння (5), мають вигляд

$$n_1^0 = 1, \quad n_2^0 = \lambda_1^6, \quad k_1 = 2(1 + \lambda_1^6)^{-1}, \quad k_2 = \frac{1}{2} \lambda_1^{-3}(1 + \lambda_1^6). \quad (6)$$

Після підставлення (6) в (5) і числових обчислень отримали залежності критичних укорочень ($\varepsilon = 1 - \lambda_1$) від безрозмірної відстані між вільною поверхнею та площиною тріщини $\varepsilon(\beta)$ (рис. 1, криві 1). Побудували залежності критичних укорочень від безрозмірної відстані для наближених розрахункових схем: криві 2 – жорстке зачеплення; криві 3 – вільне опирання виділеного елемента.

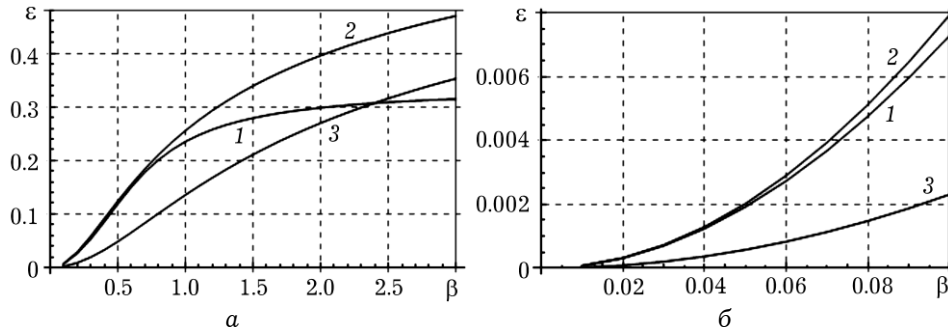


Рис. 1. Залежності критичних укорочень від безрозмірної відстані в матеріалі з потенціалом Трелоара для великих (а) та малих (б) відстаней.

Отже, під час використання наближених розрахункових схем для приповерхневої тріщини доцільніший варіант жорсткого зачеплення. Однак навіть для малих безрозмірних відстаней $\beta = 0.1$ різниця результатів між отриманими критичними укороченнями і результатами для жорсткого зачеплення перевищуватиме 8%.

Таблиця 1

β	ε	A
$9 \cdot 10^{-2}$	$5.961 \cdot 10^{-3}$	-8.8314
$8 \cdot 10^{-2}$	$4.761 \cdot 10^{-3}$	-8.9280
$7 \cdot 10^{-2}$	$3.685 \cdot 10^{-3}$	-9.0248
$6 \cdot 10^{-2}$	$2.737 \cdot 10^{-3}$	-9.1249
$5 \cdot 10^{-2}$	$1.922 \cdot 10^{-3}$	-9.2276
$4 \cdot 10^{-2}$	$1.244 \cdot 10^{-3}$	-9.3331
$3 \cdot 10^{-2}$	$7.081 \cdot 10^{-4}$	-9.4416
$2 \cdot 10^{-2}$	$3.184 \cdot 10^{-4}$	-9.5533
$1 \cdot 10^{-2}$	$8.057 \cdot 10^{-5}$	-9.6687
$1 \cdot 10^{-3}$	$8.146 \cdot 10^{-7}$	-9.7749
$1 \cdot 10^{-4}$	$8.151 \cdot 10^{-9}$	-9.7808
$1 \cdot 10^{-5}$	$8.148 \cdot 10^{-11}$	-9.7771
$1 \cdot 10^{-6}$	$8.146 \cdot 10^{-13}$	-9.7753
$1 \cdot 10^{-9}$	$8.146 \cdot 10^{-19}$	-9.7749

Таблиця 2

β	σ_{11}^0 / E	A
$9 \cdot 10^{-2}$	$-7.997 \cdot 10^{-3}$	-0.987
$8 \cdot 10^{-2}$	$-6.553 \cdot 10^{-3}$	-1.024
$7 \cdot 10^{-2}$	$-5.197 \cdot 10^{-3}$	-1.061
$6 \cdot 10^{-2}$	$-3.951 \cdot 10^{-3}$	-1.097
$5 \cdot 10^{-2}$	$-2.834 \cdot 10^{-3}$	-1.134
$4 \cdot 10^{-2}$	$-1.871 \cdot 10^{-3}$	-1.169
$3 \cdot 10^{-2}$	$-1.084 \cdot 10^{-3}$	-1.204
$2 \cdot 10^{-2}$	$-4.947 \cdot 10^{-4}$	-1.237
$1 \cdot 10^{-2}$	$-1.268 \cdot 10^{-4}$	-1.268
$1 \cdot 10^{-3}$	$-1.290 \cdot 10^{-6}$	-1.290
$1 \cdot 10^{-4}$	$-1.287 \cdot 10^{-8}$	-1.287
$1 \cdot 10^{-5}$	$-1.285 \cdot 10^{-10}$	-1.285
$1 \cdot 10^{-6}$	$-1.284 \cdot 10^{-12}$	-1.284
$1 \cdot 10^{-9}$	$-1.284 \cdot 10^{-18}$	-1.284

Під час використання наближених розрахункових схем для плоскої дископодібної пластини з матеріалу з потенціалом Трелоара $\sigma_{кр} = A_{кр} \beta^2 C_0$. Для жорстко закріпленої пластини $A_{кр} = -9.7866$.

У табл. 1 наведено критичні укорочення для дуже малих безрозмірних відстаней. Для безрозмірних відстаней, якщо $\beta < 0.04$, різниця результатів між отриманими критичними укороченнями і результатами для наближених розрахункових схем за жорсткого защемлення менша ніж 4%. З припущення, що коли безрозмірна відстань прямує до нуля, напруження σ_{11}^0 прямують до $A\beta^2 C_0$, знайдені значення коефіцієнта A . Отримані результати свідчать, що значення параметра A прямує до значення, що відповідає жорстко защемленій пластині.

Для композитного матеріалу з наведеними характеристиками трансверсально-ізотропного середовища $\nu = 0.3$, $\nu' = 0.2$, $G'/E = 0.1$, $E'/E = 0.5$ на рис. 2 зображено залежності критичних напружень від безрозмірної відстані між тріщиною та вільною поверхнею.

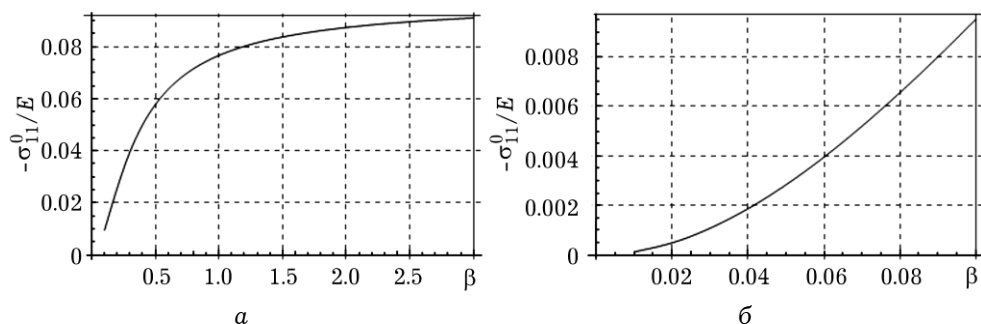


Рис. 2. Залежності критичних напружень від безрозмірної відстані в композитному матеріалі для великих (а) та малих (б) відстаней.

У таблиці 2 наведені результати критичних напружень для дуже малих безрозмірних відстаней, а також з припущення, що σ_{11}^0/E прямує до $A\beta^2$, значення коефіцієнту A .

Висновки. Досліджено руйнування півпростору з дископодібною тріщиною в еластичних та композитних матеріалах для широкого діапазону відстаней між тріщиною та вільною поверхнею. Виявлено, що критичні напруження та укорочення мають квадратичну залежність від безрозмірної відстані між тріщиною та вільною поверхнею, коли ця відстань прямує до нуля. Також зроблено висновки про можливість використання наближених розрахункових схем під час розв'язання таких задач. Тоді потрібно обирати жорстке закріплення для відокремленої пластини. Наближені розрахункові схеми можна використовувати для дуже малих безрозмірних відстаней.

1. Богданов В. Л. Осесиметрична задача про приповерхневу тріщину нормального відриву в композитному матеріалі з залишковими напруженнями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 2. – Р. 45–54.
2. Богданов В. Л., Гузь А. Н., Назаренко В. М. Пространственные задачи механики разрушения материалов при действии направленных вдоль трещин усилий (обзор) // Прикл. механика. – 2015. – **51**, № 5. – С. 3–89.
То же: Bogdanov, V. L., Guz A. N., Nazarenko V. M. Spatial Problems of the Fracture of Materials Loaded Along Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, № 5. – Р. 489–560.
3. Гузь А. Н. О построении основ механики разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (обзор) // Прикл. механика. – 2014. – **50**, № 1. – С. 5–88.
То же: Guz A. N. Establishing the Foundations of Fracture of Materials Compressed Along Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, № 1. – Р. 1–57.
4. Гузь А. Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1983. – 296 с.

5. Гузь А. Н., Назаренко В. М. Механика разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (обзор). Высокоэластичные материалы // Прикл. механика. – 1989. – 25, № 9. – С. 3–32.
То же: *Guz A. N., Nazarenko V. M. Fracture mechanics of material in compression along cracks (review). Highly elastic materials // Soviet Appl. Mech.* – 1989. – 25, № 9. – P. 851–876.
6. Гузь А. Н., Назаренко В. М. Механика разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (обзор). Конструкционные материалы // Прикл. механика. – 1989. – 25, № 10. – С. 3–19.
То же: *Guz A. N., Nazarenko V. M. Fracture mechanics of materials under compression along cracks (survey). Structural materials // Soviet Appl. Mech.* – 1989. – 25, № 10. – P. 959–972.
7. Гузь А. Н., Довжик М. В., Назаренко В. М. Разрушение материалов при сжатии вдоль приповерхностной трещины для малых расстояний между свободной поверхностью и трещиной // Прикл. механика. – 2011. – 47, № 6. – С. 28–37.
То же: *Guz A. N., Dovzhik M. V., Nazarenko V. M. Fracture of a material compressed along a crack located at a short distance from the free surface // Int. Appl. Mech.* – 2011. – 47, № 6. – P. 627–635.
8. Довжик М. В. Разрушение полупространства при сжатии вдоль приповерхностной дискообразной трещины для малых расстояний между свободной поверхностью и трещиной // Прикл. механика. – 2012. – 48, № 3. – С. 79–88.
То же: *Dovzhik M. V. Fracture of a half-space compressed along a penny-shaped crack located at a short distance from the surface // Int. Appl. Mech.* – 2012. – 48, № 3. – P. 294–304.
9. *Obreimoff I. W. The splitting strength of mica // Proc. Roy. Soc. Lond.* – 1930. – 127 A. – P. 290–297.
10. *Treloar L. R. G. Large elastic deformations in rubber-like materials // IUTAM Colloquium.* – Madrid. – 1955. – P. 208–217.

РАЗРУШЕНИЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ СЖАТИИ ВДОЛЬ ПРИПОВЕРХНОСТНОЙ ДИСКООБРАЗНОЙ ТРЕЩИНЫ В КОМПОЗИТНЫХ И ЭЛАСТИЧНЫХ МАТЕРИАЛАХ

Исследовано разрушение материала при сжатии вдоль приповерхностной трещины. Рассмотрена осесимметричная задача для круговой трещины. Как пример численно исследованы эластичные и композитные материалы при больших и малых расстояниях между трещиной и свободной поверхностью. Получены критерии применимости приближенных расчетных схем как с точки зрения тонкостенности, так и условий закрепления.

FRACTURE OF HALF-SPACE COMPRESSED ALONG THE NEAR-SURFACE PENNY-SHAPED CRACK IN COMPOSITE AND ELASTIC MATERIALS

The fracture of the material in compression along the near-surface crack is investigated. The axisymmetrical problem for penny-shaped crack is considered. As an example, a numerical investigation for elastic and composite materials for large and small distances between the fracture and the free surface is conducted. Criteria for the applicability of «beam approximation» are obtained.

Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Поступила
22.10.16