УДК 539.3

Я. І. Кунець, В. В. Матус, В. О. Міщенко

РОЗСІЯННЯ ЗГИННИХ ХВИЛЬ ОТВОРОМ НЕКАНОНІЧНОЇ ФОРМИ У ПЛАСТИНІ ТИМОШЕНКА–МІНДЛІНА

Метод T-матриць поширено на задачі розсіяння згинних хвиль отвором неканонічної форми, що міститься у необмеженій тонкій пластині. Згинні коливання пластини описано в межах теорії Тимошенка–Міндліна.

Вступ. Ґрунтовний аналіз останніх досягнень теорії дифракції згинних хвиль на неоднорідностях у тонких пластинах подано в працях [3–5, 8, 9]. Ефективним інструментом дослідження хвиль, розсіяних об'єктами складної геометричної форми, є метод T-матриць, який розроблено [3, 4] для задач розсіяння хвиль у пластинах Кірхгофа. При цьому отримано зв'язок між набігальною на розсіювач та дифрагованою ним хвилями, поданими у вигляді розкладів за системами базових хвильових функцій, тобто побудовано матрицю переходу (T-матрицю). Метод T-матриць поширено на задачі розсіяння хвиль у тонких безмежних пластинах, рух яких описано в межах теорії Тимошенка–Міндліна. Припущено, що розсіювачем є вільний від зусиль або защемлений отвір неканонічної форми. Для цих випадків побудовані матриці переходу.

Формулювання задачі розсіяння. Розглянемо трансверсально-ізотропну пластину товщиною h, в якій міститься отвір неканонічної форми. В теорії Тимошенка–Міндліна за поперечних гармонічних коливань пластини прогин w і кути повороту нормалі ψ_1, ψ_2 пов'язані рівняннями [1, 2, 7]

$$D\left(\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\psi} - \frac{1-\nu}{2}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{\psi}\right) - \Lambda\left(\boldsymbol{\psi} + \operatorname{grad} w\right) - \rho I\omega^2\boldsymbol{\psi} = 0\,, \quad \mathbf{r} \in R^2 \setminus S\,,$$

$$\Delta w + \operatorname{div}\boldsymbol{\psi} - \frac{\rho h\omega^2}{\Lambda} w = 0\,, \quad \mathbf{r} \in R^2 \setminus S\,, \tag{1}$$

де $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ – двовимірний вектор поворотів; $D = EI/\left(1-\nu^2\right)$ – згинна жорсткість; $\Lambda = \alpha h G'$ – зсувна жорсткість; $I = h^3/12$ – момент інерції поперечного перерізу на одиницю довжини; ρ, E, G', ν – густина, модуль Юнга, модуль трансверсального зсуву, коефіцієнт Пуассона матеріалу; α – коефіцієнт зсуву; S – область неоднорідності; $\mathbf{r} = (x_1, x_2) = (r, \theta)$ – декартові та полярні координати з початком у точці O всередині неоднорідності ($x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$); ω – кругова частота згинних коливань пластини.

Відомо [1, 5, 10], що розв'язок рівнянь руху пластини в гармонічному режимі (1) можна подати як суперпозицію розв'язків трьох рівнянь Гельмгольца:

$$w = w_1 + w_2\,, \qquad \boldsymbol{\psi} = A_1 \operatorname{grad} w_1 + A_2 \operatorname{grad} w_2 - \mathbf{e}_z \times \operatorname{grad} w_3\,,$$

$$\Delta w_j + k_j^2 w_j = 0\,, \quad j = 1,2,3\,, \tag{2}$$

де

$$k_j^2 = \frac{1}{2}\left(k_p^2 + k_s^2\right) + (-1)^{j+1}\sqrt{k_f^4 + \frac{1}{4}\left(k_p^2 - k_s^2\right)^2}\,, \quad j = 1,2\,, \; k_3^2 = \alpha\frac{k_1^2 k_2^2}{k_p^2}\,,$$

$$k_s = \frac{\omega}{c_s}\,, \; k_p = \frac{\omega}{c_p}\,, \; k_f = \left(\frac{\rho h\omega^2}{D}\right)^{1/4}, \; c_s = \left(\frac{\Lambda}{\rho h}\right)^{1/2}, \; c_p = \left[\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}\right]^{1/2},$$

$$A_j = -1 + k_s^2 k_j^{-2} = 0\,, \; j = 1,2\,.$$

Одиничний вектор $\mathbf{e}_z$ перпендикулярний до серединної поверхні пластини.

Вважаємо, що на розсіювач набігає плоска хвиля згину з потенціалом

$$w^i(\mathbf{r}) = w_0 \exp(ik_1 r \cos(\theta - \theta_i)),$$

де w_0 та θ_i – амплітуда та кут її падіння. Повне поле переміщень пластини є суперпозиція набігальної та розсіяної хвиль:

$$w(\mathbf{r}) = w^i(\mathbf{r}) + w^s(\mathbf{r}), \ \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}) = A_1 \operatorname{grad} w^i(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\psi}^s(\mathbf{r}), \tag{3}$$

де $w^s = w_1^s + w_2^s$, $\boldsymbol{\psi}^s = A_1 \operatorname{grad} w_1^s + A_2 \operatorname{grad} w_2^s - \mathbf{e}_z \times \operatorname{grad} w_3^s$ – шукане розсіяне поле. Функції w_j^s, $j = 1,2,3$ задовольняють відповідні рівняння (2), умови на контурі розсіювача $\Gamma = \partial S$ та на безмежності:

$$\psi_n(\mathbf{r}) = \psi_s(\mathbf{r}) = w(\mathbf{r}) = 0, \qquad \mathbf{r} \in \Gamma \ \text{(защемлений отвір)}, \tag{4}$$

$$Q_n(\mathbf{r}) = M_n(\mathbf{r}) = M_{ns}(\mathbf{r}) = 0, \qquad \mathbf{r} \in \Gamma \ \text{(вільний отвір)}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial w_1^s}{\partial r} - ik_1 w_1^s = o(r^{-1/2}), \ w_j^s = o(1), \ j = 2,3, \ r \to \infty, \tag{6}$$

де Q_n, M_n та M_{ns} – перерізувальна сила, згинний та крутний моменти на контурі з одиничними нормаллю $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ і дотичним вектором $\mathbf{s}$ [1].

Метод розв'язку задачі. Для деяких двох розв'язків $\mathbf{u} = (\psi_1, \psi_2, w)$ та $\mathbf{u}' = (\psi_1', \psi_2', w')$ рівнянь (1) в області W пластини, вільної від зовнішніх навантажень, маємо [7]:

$$\int_C \left(\mathbf{t}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}' - \mathbf{t}(\mathbf{u}') \cdot \mathbf{u}\right) ds = 0, \tag{7}$$

де $\mathbf{t} = (M_{i1} n_i, M_{i2} n_i, Q_i n_i)$, M_{ij} та Q_i – компоненти тензора моментів та вектора перерізувальних сил у декартовій системі координат; C – контур двовимірної області W. Співвідношення (7) є математичним формулюванням теореми взаємності, яку застосуємо для побудови розв'язку задачі (2)–(6).

Введемо в розгляд векторні хвильові функції

$$\boldsymbol{\Phi}_{\tau\sigma m}(\mathbf{r}) = (A_\tau \operatorname{grad} + \mathbf{e}_z) H_m^{(1)}(k_\tau r) C_{\sigma m}(\theta), \quad \tau = 1,2,$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{3\sigma m}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z \times \operatorname{grad} H_m^{(1)}(k_3 r) C_{\sigma m}(\theta), \ \sigma = 1,2, \quad m = \overline{0,\infty},$$

$$C_{1m}(\theta) = \cos m\theta, \quad C_{2m}(\theta) = \sin m\theta, \tag{8}$$

де $H_m^{(1)}(x)$ –функції Ганкеля першого роду. Векторні хвильові функції, регулярні на початку координат, позначимо так:

$$\boldsymbol{\varphi}_{\tau\sigma m}(\mathbf{r}) = (A_\tau \operatorname{grad} + \mathbf{e}_z) J_m(k_\tau r) C_{\sigma m}(\theta), \quad \tau = 1,2,$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{3\sigma m}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z \times \operatorname{grad} J_m(k_3 r) C_{\sigma m}(\theta), \tag{9}$$

де $J_m(x)$ –функції Бесселя.

Виділимо область W_+, обмежену колом C_+, яке охоплює контур Γ. Застосуємо теорему взаємності (7) в областях W_+ ($\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}_{\tau\sigma m}$, $\mathbf{u}' = \boldsymbol{\varphi}_{\tau'\sigma'm'}$) та $R^2 \setminus W_+$ ($\mathbf{u} = \boldsymbol{\Phi}_{\tau\sigma m}$, $\mathbf{u}' = \boldsymbol{\Phi}_{\tau'\sigma'm'}$ або $\mathbf{u} = \boldsymbol{\Phi}_{\tau\sigma m}$, $\mathbf{u}' = \boldsymbol{\varphi}_{\tau'\sigma'm'}$). Використовуючи властивості функцій Бессселя та Ганкеля, подібно, як і у праці [6], отримуємо умови ортогональності векторних хвильових функцій (8), (9):

$$\int_{C_+} \left(\mathbf{t}(\boldsymbol{\varphi}_{\tau\sigma m}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\tau'\sigma'm'} - \mathbf{t}(\boldsymbol{\varphi}_{\tau'\sigma'm'}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\tau\sigma m}\right) ds = 0,$$

$$\int_{C_+} \left(\mathbf{t}(\mathbf{\Phi}_{\tau\sigma m}) \cdot \mathbf{\Phi}_{\tau'\sigma' m'} - \mathbf{t}(\mathbf{\Phi}_{\tau'\sigma' m'}) \cdot \mathbf{\Phi}_{\tau\sigma m} \right) ds = 0 \,,$$

$$\int_{C_+} \left(\mathbf{t}(\mathbf{\Phi}_{\tau\sigma m}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\tau'\sigma' m'} - \mathbf{t}(\boldsymbol{\varphi}_{\tau'\sigma' m'}) \cdot \mathbf{\Phi}_{\tau\sigma m} \right) ds = D_{\tau\sigma m} \delta_{\tau\tau'} \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{mm'} \qquad (10)$$

де $D_{\tau\sigma m} = \begin{cases} 4i(DA_\tau^2 + \Lambda k_s^2 / k_\tau^2) / \varepsilon_m \\ 0, \sigma = 2, m = 0 \end{cases}$, $\tau = 1,2$, $D_{3\sigma m} = \begin{cases} 2iD(1-\nu)k_3^2) / \varepsilon_m \\ 0, \sigma = 2, m = 0 \end{cases}$, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_m = 2$, якщо $m \ge 1$.

Умови ортогональності (10) є ключовими для побудови матриці переходу. Зауважимо також, що контурні інтеграли в них не залежать від радіуса кола C_+.

Набігальну хвилю $\mathbf{u}^{inc} = A_1 \operatorname{grad} w^i + \mathbf{e}_z w^i$ розкладемо за системою регулярних хвильових функцій (9):

$$\mathbf{u}^{inc}(\mathbf{r}) = \sum_{\tau\sigma m} a_{\tau\sigma m} \boldsymbol{\varphi}_{\tau\sigma m}(\mathbf{r}).$$

Розсіяне поле $\mathbf{u}^{sc} = \boldsymbol{\psi}^s + \mathbf{e}_z w^s$ ззовні кола C_+ шукаємо у вигляді розкладів за системою хвильових функцій (8):

$$\mathbf{u}^{sc}(\mathbf{r}) = \sum_{\tau\sigma m} b_{\tau\sigma m} \mathbf{\Phi}_{\tau\sigma m}(\mathbf{r}). \qquad (11)$$

Застосовуємо тепер теорему взаємності в області, обмеженій контурами Γ і C_+. При цьому $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{inc} + \mathbf{u}^{sc}$ − розв'язок задачі (2)−(6), а $\mathbf{u}' = \mathbf{\Phi}_{\tau\sigma m}$ і $\mathbf{u}' = \boldsymbol{\varphi}_{\tau\sigma m}$:

$$\int_\Gamma \left(\mathbf{t}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{\Phi}_{\tau\sigma m} - \mathbf{t}(\mathbf{\Phi}_{\tau\sigma m}) \cdot \mathbf{u} \right) ds = D_{\tau\sigma m} a_{\tau\sigma m} \,,$$

$$\int_\Gamma \left(\mathbf{t}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\tau\sigma m} - \mathbf{t}(\boldsymbol{\varphi}_{\tau\sigma m}) \cdot \mathbf{u} \right) ds = D_{\tau\sigma m} b_{\tau\sigma m} \,.$$

Враховуючи граничні умови, для пластини зі защемленим контуром

$$\int_\Gamma \mathbf{t} \cdot \mathbf{\Phi}_{\tau\sigma m} ds = D_{\tau\sigma m} a_{\tau\sigma m} \,, \quad \int_\Gamma \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\tau\sigma m} ds = D_{\tau\sigma m} b_{\tau\sigma m} \,, \qquad (12)$$

а з вільним

$$\int_\Gamma \mathbf{t}(\mathbf{\Phi}_{\tau\sigma m}) \cdot \mathbf{u} ds = -D_{\tau\sigma m} a_{\tau\sigma m} \,, \quad \int_\Gamma \mathbf{t}(\boldsymbol{\varphi}_{\tau\sigma m}) \cdot \mathbf{u} ds = -D_{\tau\sigma m} b_{\tau\sigma m} \,. \qquad (13)$$

Невідомі величини вектора зусиль $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$ у (12) та вектора переміщень $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ у (13) на контурі отвору розкладемо за системою тригонометричних функцій:

$$\mathbf{t}(\mathbf{r}) = \sum_{\sigma' m'} \mathbf{x}^r_{\sigma' m'} C_{\sigma' m'}(\theta), \ \mathbf{r} \in \Gamma, \ \mathbf{x}^r_{\sigma' m'} = x^r_{1\sigma' m'} \mathbf{n} + x^r_{2\sigma' m'} \mathbf{s} + x^r_{3\sigma' m'} \mathbf{e}_z \,,$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_{\sigma' m'} \mathbf{x}^s_{\sigma' m'} C_{\sigma' m'}(\theta), \ \mathbf{r} \in \Gamma, \ \mathbf{x}^s_{\sigma' m'} = x^s_{1\sigma' m'} \mathbf{n} + x^s_{2\sigma' m'} \mathbf{s} + x^s_{3\sigma' m'} \mathbf{e}_z \,. \qquad (14)$$

Розглянемо детальніше отвір зі защемленим контуром. Підставивши (14) у рівняння (12), отримуємо системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{\tau'=1}^{3} \sum_{\sigma'=1}^{2} \sum_{m'=0}^{\infty} Q_{\tau\sigma m, \tau'\sigma' m'} x^r_{\tau'\sigma' m'} = A_{\tau\sigma m} \,, \quad \tau = 1,2,3 \,, \ \sigma = 1,2 \,, \ m = \overline{0,\infty} \,, \qquad (15)$$

$$\sum_{\tau'=1}^{3} \sum_{\sigma'=1}^{2} \sum_{m'=0}^{\infty} \tilde{Q}_{\tau\sigma m, \tau'\sigma' m'} x^r_{\tau'\sigma' m'} = B_{\tau\sigma m} \,, \quad \tau = 1,2,3 \,, \ \sigma = 1,2 \,, \ m = \overline{0,\infty} \,, \qquad (16)$$

де $Q_{\tau\sigma m,\tau'\sigma'm'} = \int_\Gamma \Phi_{\tau'\tau\sigma m} C_{\sigma'm'}(\theta) ds$; $\tilde{Q}_{\tau\sigma m,\tau'\sigma'm'} = \int_\Gamma \varphi_{\tau'\tau\sigma m} C_{\sigma'm'}(\theta) ds$; $\Phi_{\tau'\tau\sigma m}$, $\varphi_{\tau'\tau\sigma m}$ ($\tau' = 1,2,3$) – проекції векторних функцій $\boldsymbol{\Phi}_{\tau\sigma m}$, $\boldsymbol{\varphi}_{\tau\sigma m}$ на орти $\mathbf{n},\mathbf{s},\mathbf{e}_z$ відповідно; $A_{\tau\sigma m} = D_{\tau\sigma m} a_{\tau\sigma m}$; $B_{\tau\sigma m} = D_{\tau\sigma m} b_{\tau\sigma m}$. Запишемо ці системи в матричному вигляді:

$$\mathbf{Q}\mathbf{x}^r = \mathbf{a} , \quad \tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{x}^r = \mathbf{b} , \tag{17}$$

де $\mathbf{x}^r$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ – матриці-стовпці, утворені елементами $x^r_{\tau'\sigma'm'}$, $A_{\tau\sigma m}$, $B_{\tau\sigma m}$ відповідно, а матриці $\mathbf{Q}$ та $\tilde{\mathbf{Q}}$ формують елементи $Q_{\tau\sigma m,\tau'\sigma'm'}$ та $\tilde{Q}_{\tau\sigma m,\tau'\sigma'm'}$.

Із матричних рівнянь (17) знаходимо T-матрицю переходу, яка визначає шукані коефіцієнти розсіяного поля за відомими коефіцієнтами поля, що падає:

$$\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{-1} . \tag{18}$$

Прогин пластини в дальній хвильовій зоні визначаємо зі співвідношення [10]

$$w^s(r,\theta) = w_0 \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r}} e^{i(k_1 r - \pi/4)} f\left(\theta, \theta_i\right) + o(1/\sqrt{k_1 r}) , \quad k_1 r \to \infty .$$

Амплітуду розсіяння $f(\theta,\theta_i)$ отримуємо із (11), використовуючи асимптотичні розклади функцій Ганкеля

$$f\left(\theta, \theta_i\right) = \sum_{\sigma=1}^{2} \sum_{m=0}^{\infty} a^*_{1\sigma m}(\theta) b_{1\sigma m}(\theta_i) , \tag{19}$$

де “зірочка” означає операцію комплексного спряження. Числово реалізувати запропонований алгоритм можна методом редукції. Порядок редукції систем (15), (16) залежатиме від форми розсіювача і його хвильових розмірів.

Для задачі розсіяння згинних хвиль отвором, вільним від зусиль, залишаються справедливими усі співвідношення (15)–(19) з тією відмінністю, що елементи матриць $\mathbf{Q}$ та $\tilde{\mathbf{Q}}$ матимуть інший вигляд.

Висновки. Метод T-матриць розвинуто для задач розсіяння хвиль отвором неканонічної форми у тонкій пластині, рух якої описує теорія Тимошенка–Міндліна. Запропонований підхід дає можливість ефективно аналізувати дифраговані хвильові поля, зокрема, в дальній зоні Фраунгофера. Його можна поширити для множинних розсіювачів у тонкій пластині.

1. *Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А.* Дифракция упругих волн. – Киев: Наук. думка, 1978. – 307 с.
2. *Марчук М. В., Пакош В. С., Лесик О. Ф.* Вплив інерції нормального елемента на основну власну частоту податливої до трансверсального зсуву квадратної пластини // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2011. – Вип. 9. – С. 135–140.
3. *Climente A., Norris A. N., Sanchez-Dehesa J.* Scattering of flexural waves from a hole in a thin plate with an internal beam // J. Acoust. Soc. Am. – 2015. – **137**. – P. 293–302.
4. *Matus V. V., Emets V. F.* T-matrix method formulation applied to the study of flexural waves scattering from a through obstacle in a plate // J. Sound Vib. – 2010. – **329**, № 14. – P. 2843–2850.
5. *Movchan N. V., Mcphedran R. C., Movchan A. B.* Flexural waves in structured elastic plates: Mindlin versus bi-harmonic models // Proc. R. Soc. A. – 2011. – **467**. – P. 869–880.
6. *Pao Y. H.* Betti’s identity and transition matrix for elastic waves // J. Acoust. Soc. Am. – 1978. – **64**. – P. 302–310.
7. *Rose L. R. F., Wang C. H.* Mindlin plate theory for damage detection: imaging of flexural inhomogeneities // J. Acoust. Soc. Am. – 2010. – **127**. – P. 754–763.

8. *Smith M. J. A., Meylan M. H., McPhedran R. C.* Scattering by cavities of arbitrary shape in an infinite plate and associated vibration problems // J. Sound Vib. – 2011. – **330**, № 14. – P. 4029–4046.
9. *Torrent D., Mayou D., Sanchez-Dehesa J.* Elastic analog of graphene: Dirac cones and edge states for flexural waves in thin plates // Phys. Review B. – 2013. – **87**. – P. 115–143.
10. *Vemula C., Norris A. N.* Flexural wave propagation and scattering on thin plates using Mindlin theory // Wave Motion. – 1997. – **26**. – P. 1–12.

РАССЕЯНИЕ ИЗГИБНЫХ ВОЛН ОТВЕРСТИЕМ НЕКАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ В ПЛАСТИНЕ ТИМОШЕНКО–МИНДЛИНА

Метод Т-матриц распространен на задачи рассеяния изгибных волн отверстием неканонической формы, содержащимся в неограниченной тонкой пластине. Изгибные колебания пластины описаны в рамках теории Тимошенко–Миндлина.

SCATTERING OF FLEXURAL WAVES FROM A HOLE OF NONCLASSICAL FORM IN PLATES USING TIMOSHENKO-MINDLIN THEORY

The T-matrix method has been generalized on the problem of flexural waves scattering by a hole of non-classical form in an infinite thin plate. Flexural vibrations of the plate are described according to the Timoshenko–Mindlin plate theory.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
05.10.16