

РІВНЯННЯ ПОВЕРХНЕВОГО ПОТОКУ В НАБЛИЖЕННІ КІНЕМАТИЧНОЇ ХВИЛІ ДЛЯ РУСЕЛ З НЕРІВНОМІРНИМ ДНОМ

Серед гідрологічних моделей поверхневого стоку важливе значення мають моделі кінематичної хвилі. Основна їх властивість в тому, що водні маси рухаються в умовах рівноваги сил опору та сил тяжіння. Рівняння, які описують ці процеси, часто неможливо застосувати для нерівномірних поверхонь стоку, тому показано, що в таких випадках необхідні регуляризовані рівняння з іншими похідними. Побудовано рівняння, які враховують дію сил тертя на дні потоку, встановлено залежності швидкості потоку від глибини.

Основні рівняння руху. Припустимо, що потік води підпорядкований закону змін імпульсу у вигляді [11, с. 55]:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad (1)$$

де $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – вектор швидкості; ρ – густина рідини; p – тиск; μ – коефіцієнт в'язкості.

Якщо рідина нестислива, тоді густина $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3)$ не змінюється за часом і рівняння нерозривності має вигляд

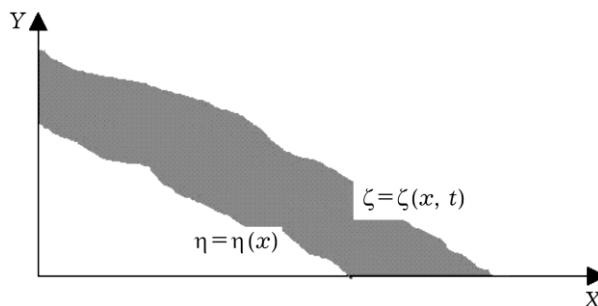
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

Враховуючи його, рівняння (1) запишемо так:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{v}, \quad (3)$$

або в одновимірному випадку

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (4)$$



Графічне зображення поверхневого стоку води.

Для потоків мілкої води [2-4, 9] використаємо гідростатичний закон для тиску:

$$p = g\zeta(\zeta - \eta), \quad (5)$$

де ζ – вільна крива потоку; η – крива його дна.

Якщо розглядаємо нестисливу рідину (2), то для похідної тиску маємо:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g\zeta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + g(\zeta - \eta) \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (6)$$

Нехай густина за глибиною змінюється мало і зміни кривої дна потоку несуттєво відрізняються від змін його вільної кривої. Крім того, за значних нерівностей дна вільна крива потоку матиме аналогічні збурення, спри-

чинені змінами дна, тому доданок з тиском у рівнянні (6) набуватиме достатньо мале значення.

Тоді рівняння (4) для опису руху потоку води матиме вигляд

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \quad (7)$$

Це рівняння також часто використовують для характеристик потоків у руслах рівнинних та напівгірських річок.

Запис рівняння руху в безрозмірному вигляді. Приведемо рівняння (5) до безрозмірного вигляду і отримаємо безрозмірні критерії для характеристик суцільного середовища потоку, наприклад, числа Рейнольдса.

Уведемо величини

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{t} = \frac{t}{L v_\infty}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_\infty}, \quad \bar{v} = \frac{v}{v_\infty}, \quad (8)$$

де L – характерний розмір поверхні стоку; v_∞ , ρ_∞ , μ_∞ – деякі максимальні значення швидкості, густини та в'язкості води.

На підставі (8), домноживши рівняння (7) на вираз $\frac{L}{v_\infty^2 \rho_\infty}$, одержимо:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{v}^2) - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} = 0, \quad (9)$$

де $\text{Re} = \frac{\rho v_\infty L}{\mu}$ – число Рейнольдса.

Надалі для спрощення запису символ „ $\bar{}$ ” опускаємо.

Усереднення рівняння за товщиною потоку води. Усереднимо рівняння (9) за товщиною шару потоку води [4, 5, 7]. Оскільки воно записане у безрозмірному вигляді, то вважатимемо, що нижня $\eta(x)$ та верхня $\zeta(x, t)$ межі потоку також безрозмірні.

Почнемо з першого доданку рівняння. Одержимо:

$$\int_{\eta}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial t} v dy = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\eta}^{\zeta} v dy - \frac{\partial \zeta}{\partial t} v|_{y=\zeta}. \quad (10)$$

Перейдемо до конвективного складника рівняння

$$\int_{\eta}^{\zeta} \frac{\partial v^2}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^{\zeta} v^2 dy - \frac{\partial \zeta}{\partial x} v^2|_{y=\zeta} + \frac{\partial \eta}{\partial x} v^2|_{y=\eta}. \quad (11)$$

Інтеграл для другої похідної подамо у вигляді

$$\int_{\eta}^{\zeta} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dy = \frac{\partial}{\partial x^2} \int_{\eta}^{\zeta} v dy - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} v|_{y=\zeta} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} v|_{y=\eta}. \quad (12)$$

Підставивши вирази (10)–(12) у рівняння (9), отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\eta}^{\zeta} \rho v dy + \frac{\partial}{\partial x^2} \int_{\eta}^{\zeta} \rho v^2 dy - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x^2} \int_{\eta}^{\zeta} v dy - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + v \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) (\rho v)|_{y=\zeta} + \\ + \frac{\partial \eta}{\partial x} (\rho v^2)|_{y=\eta} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} (v)|_{y=\zeta} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} (v)|_{y=\eta} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Спростимо попередній вираз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\eta}^{\zeta} \rho v dy \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{\eta}^{\zeta} \rho v^2 dy \right) - \frac{\partial}{\partial x^2} \int_{\eta}^{\zeta} v dy - (v_0 + R) v_0 + \\ + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} v_\eta + \frac{1}{\text{Re} \rho} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) v_\eta - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} v|_{y=\zeta} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

де R – інтенсивність дощу, що впливає на масу вільної поверхні потоку.

Якщо для потоку задати кінематичну умову

$$v_0 + R = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + v \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (15)$$

де v_0 – швидкість на вільній поверхні, та врахувати умову прилипання

$$v|_{y=\eta} = 0,$$

то співвідношення (14) можна переписати так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\eta}^{\zeta} \rho v dy \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{\eta}^{\zeta} \rho v^2 dy \right) - \\ - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x^2} \int_{\eta}^{\zeta} v dy - (v_0 + R) \rho v_0 - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} v_0 = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Щоб спростити вираз (16), перейдемо до середніх величин, зокрема,

$$q = \int_{\eta}^{\zeta} v dy, \quad \bar{v} = \frac{q}{\zeta - \eta}, \quad \int_{\eta}^{\zeta} v^2 dy = \bar{v} q, \quad \bar{\rho} = \frac{1}{\zeta - \eta} \int_{\eta}^{\zeta} \rho(x) dy. \quad (17)$$

Перепишемо (16) у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} q) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{v} q) - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = R v_0 \bar{\rho} + v_0^2 \bar{\rho} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} v_0. \quad (18)$$

Припустимо, що $\rho = \text{const}$ і знехтуємо доданки вище другого порядку, оскільки вони достатньо малі для розглянутих поверхневих стоків.

Тоді [10]

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{v} q) - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = R v_0. \quad (19)$$

Поділивши (19) на усереднене значення \bar{v} , одержимо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q}{\bar{v}} \right) + \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{q}{\bar{v}} \right) = R \frac{v_0}{\bar{v}}. \quad (20)$$

Прийmemo $\bar{v} = v_0$ і позначимо $h = \frac{q}{v_0}$, тоді

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = R. \quad (21)$$

Сили тертя для потоку води. Припустимо, що потік води знаходиться під кутом α до поверхні горизонту. Виділимо в ньому поперечний переріз, що займає рідину, який називатимемо змоченим.

Виходячи із законів збереження [11], можемо записати:

$$\rho g S L \alpha = P L F, \quad (22)$$

де S – площа поперечного перерізу; L – характерний розмір потоку; P – змочений периметр; F – сила тертя на одиницю площі потоку.

Показано [11], що сила F пропорційна квадрату середньої швидкості в поперечному перерізі, тоді

$$\rho g S \alpha = P k v^2, \quad (23)$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

Якщо ввести позначення

$$\frac{S}{P} = R, \quad (24)$$

то з урахуванням (24), (23) запишемо:

$$\alpha = C \frac{v^2}{R}, \quad (25)$$

де $C = \frac{k}{\rho g}$; R – гідравлічний радіус.

Для неоднорідного потоку [10] вираз (25) зведемо до виду

$$\alpha = C \frac{v^n}{R^m}.$$

Звідси

$$v = \left(\frac{\alpha}{C} \right)^{\frac{1}{n}} R^{\frac{m}{n}}. \quad (26)$$

Для різних значень n отримаємо різні види потоків води. Наприклад, $n=1$ – ламінарний, $n = 1.75$ – слабкий турбулентний, $1.75 \leq n \leq 2$ – перехідний турбулентний, $n = 2$ – повний турбулентний.

Найуживанішими для (26) є такі значення n і m :

1. Формула Манінга: $n = 2$, $m = 4/3$

$$v = \sqrt{\frac{\alpha}{C}} R^{2/3}. \quad (26')$$

2. Формула Шезі: $n = 2$, $m = 1$

$$v = \sqrt{\frac{\alpha}{C}} R^{1/2}, \quad (26'')$$

яку часто вживають для визначення потоків у трубах і каналах.

3. Формула Дарсі-Вейсбача: $n = 2$, $m = 1$

$$\alpha = \frac{t}{Sg} \frac{v^2}{R}. \quad (26''')$$

Загалом можемо записати, що

$$v = F(R), \quad (27)$$

де F – функціонально залежить від гідравлічного радіуса.

Якщо у термінах розходу потоку q і глибини, покласти $R = S = h$, то

$$q = \left(\frac{\alpha}{C} \right)^{\frac{1}{n}} h^{1+\frac{m}{n}}. \quad (28)$$

Для формули Шезі з (26'') матимемо:

$$q = \left(\frac{\alpha}{C} \right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{2}}.$$

Загалом з (28) можемо записати

$$q = \alpha h^{\beta} \quad (29)$$

або

$$q = Q(h). \quad (30)$$

Такі потоки (див. Лайтхілл, Вульхайзер [12], Уїзем [8]), що дістали назву кінематичних хвиль розглядали також у працях [1, 5, 6].

Рівняння кінематичної хвилі для потоку з нерівномірним дном. З формули (29) для $\beta = \frac{3}{2}$ отримаємо співвідношення Шезі. Запишемо його так:

$$q = \alpha H^{\frac{3}{2}}, \quad (31)$$

де α – кут нахилу на розрахунковому елементі і $\alpha = \text{const}$. Тоді для похідної q отримаємо:

$$\frac{dq}{dx} = \frac{\partial q}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} = \beta \alpha H^{\beta-1} \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (32)$$

Позначимо

$$\frac{\partial q}{\partial h} = \gamma, \quad (33)$$

тоді, з урахуванням формул (32), (33), вираз (23) подамо у вигляді

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \gamma \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = R. \quad (34)$$

У правій частині (34) враховано вплив зовнішніх сил на потік води, зокрема, дощові опади, хоча можуть бути і інші природні явища, що впливають на нього.

Загалом формулу (34) записують так:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \gamma \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = f, \quad (35)$$

де $f = f(x)$ – функція впливу зовнішніх чинників на потік води деякої території.

1. Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. – Москва: Мир, 1986. – 136 с.
2. Венгерський П. С., Трушевський В. М. Чисельне моделювання мілкового схилового стоку в кінематичному наближенні // Вісн. Львівськ. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. – 2000. – Вип. 1. – С. 44–49.
3. Венгерський П. С., Трушевський В. М. Числове дослідження регуляризованої задачі мілкової води в кінематичному наближенні // Вісн. Львівськ. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. – 2003. – Вип. 6. – С. 116–125.
4. Венгерський П. С. Чисельне дослідження математичних моделей поверхневого стоку в наближенні кінематичної хвилі // Матеріали Міжнар. наук. конф. „Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів”. – Рівне: РВВ РДГУ, 2015. – С. 38–39.
5. Кирилич В. М., Филимонов А. М. Обобщенная непрерывная разрешимость задач с неизвестными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений // Матем. студії. – 2008. – 30, № 1. – С. 42–60.
6. Кучмент Л. С. Модели формирования речного стока. – Ленинград: Гидрометеориздат, 1980. – 142 с.
7. Рождественский Б. А., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – Москва: Наука, 1978. – 686 с.
8. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – Москва: Мир, 1977. – 622 с.
9. Venherskyi P. Application of interval methods for solving equation of surface flow in kinematic wave approximation // XXII Int. Conf. "Problems of decision making under uncertainties". – Foros-Yalta, Ukraine, September 23–27, 2013. – P. 35–36.
10. Jeffrey A., Taniuti T. Non-linear wave propagation with applications to physics and magnetohydrodynamics. – N.Y.: Academic Press, 1964. – 380 p.
11. Wood W. L. Introduction to numerical method for water resources // Glarendon: Press, 1993. – P. 3–50.
12. Lighthill M.J., Whitham C.M. On kinematic waves // Flood movement in long rivers. – 1955. – Ser. A, № 229. – P. 281–316.

УРАВНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО СТОКА В ПРИБЛИЖЕНИИ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ДЛЯ РУСЕЛ С НЕРАВНОМЕРНЫМ ДНОМ

Среди гидрологических моделей поверхностного стока важное значение имеют модели кинематической волны. Основное их свойство в том, что водные массы перемещаются в условиях равновесия сил сопротивления и сил притяжения. Уравнения, описывающие эти процессы, часто невозможно применить для неравномерных поверхностей стока, показано, что в этих случаях необходимо

использовать регуляризованные уравнения, содержащие вторые производные. Построены уравнения, учитывающие действие сил трения на дне потока, представлены различные зависимости скорости потока от глубины.

EQUATION OF SURFACE FLOW IN KINEMATIC WAVE APPROXIMATION FOR CHANNELS WITH UNEVEN BOTTOMS

Kinematic wave models are important hydrological models of surface flow. The main property of these models is that the movement of the water mass is in equilibrium conditions of resistance forces and forces of gravity. The equations describing these processes often can not be applied to the uneven surfaces flow, so the paper shows that in these cases the regularized equations containing second derivatives should be used. We construct the equations that take into account effect of friction forces on the bottom of the flow and show different dependences of flow rate on the depth.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
25.10.16