УДК 512.628.2

І. О. Мельник

ПРО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИЙ *k*-СПЕКТР ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ НАПІВКІЛЕЦЬ

Досліджено первинний диференціальний k-спектр диференціального напівкільця R. Виявлено, що для k-напівкільця він є T_0-простором. Встановлено деякі властивості *dmsp*-напівкілець. Доведено, що первинний диференціальний k-спектр комутативного *dmsp*-напівкільця є компактним топологічним простором.

У 1935 р. Вандівер [7] ввів поняття напівкільця як узагальнення асоціативного кільця та дистрибутивної ґратки. Найпростіші приклади та властивості диференціювань напівкілець, диференціальних напівкілець та їх ідеалів вивчав Голан [3]. Т'єррен [6] розглядав диференціальні напівкільця мов, зокрема довів, що напівкільце мов над деяким алфавітом утворює диференціальне адитивно ідемпотентне напівкільце, а також навів низку інших прикладів та властивостей диференціювань у таких напівкільцях. У 2010 р. [1] продовжили дослідження диференціювань напівкілець та їх диференціальних ідеалів, зокрема, встановили, що множина всіх елементів диференціального напівкільця, які мають обернені щодо додавання, є його диференціальном ідеалом. Проте глибоких результатів про диференціальні ідеали не отримали. Водночас досліджували топологію Зариського у напівкільцях та напівмодулях. У статті [2] 2012 р. ввели топологію Зариського на комутативному k-напівкільці.

Нагадаємо деякі означення та властивості, які використовуватимемо у статті. Більше інформації можна знайти у працях [3, 4].

Напівкільцем називають непорожню множину R, на якій задано дві бінарні алгебричні операції, які за традицією називають додаванням (позначають через $+$) і множенням (позначають $\cdot$), причому $(R,+,0)$ є комутативним моноїдом, $(R,\cdot)$ – напівгрупою і $(a+b)c = ac+bc$ та $a(b+c) = ab+ac$ для всіх $a,b,c \in R$. Напівкільце, яке не є кільцем, називають *власним*, а якщо $ab = ba$ для всіх $a,b \in R$, – *комутативним*.

Елемент $1 \in R$, який задовольняє умову $1\cdot r = r\cdot 1 = r$ для всіх $r \in R$, називають *одиницею напівкільця*, а $0 \in R$ – *поглинальним*, якщо $r\cdot 0 = 0\cdot r = 0$ для всіх $r \in R$. Далі розглядатимемо лише комутативні напівкільця з $1 \neq 0$, а нуль вважатимемо поглинальним.

Непорожню підмножину S напівкільця R називають *піднапівкільцем*, якщо $a+b \in S$ і $ab \in S$ для всіх $a,b \in S$. Непорожню підмножину I напівкільця R – *ідеалом*, якщо $a+b \in I$ і $ra \in I$ для всіх $a,b \in I$, $r \in R$. Ідеал I напівкільця R – *k-ідеалом*, якщо з $a+b \in I$ та $a \in I$ випливає, що $b \in I$. Напівкільце називають *k-напівкільцем* [2], якщо кожний його ідеал є k-ідеалом.

Відображення $\delta : R \to R$ називають *диференціюванням напівкільця* R [3], якщо $\delta(a+b) = \delta(a)+\delta(b)$ і $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ для будь-яких $a,b \in R$. *Диференціальним напівкільцем*, або δ*-напівкільцем*, називають напівкільце разом зі заданим на ньому диференціюванням, тобто пару (R,δ), де R – напівкільце, а $\delta : R \to R$ – диференціювання. Ідеал I δ-напівкільця R називають *диференціальним*, якщо $\delta(I) \subseteq I$.

Позначатимемо через $\mathbb{N}_0$ множину $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Для елемента $r \in R$ використовуватимемо такі позначення: $r^{(0)} = r$, $r' = \delta(r)$, $r'' = \delta(r')$, ...

ISSN 1810-3022. Прикл. проблеми мех. і мат. – 2016. – Вип. 14. – С. 25–30.

$r^{(n)} = \delta\left(r^{(n-1)}\right)$, де $n \in \mathbb{N}_0$. Якщо A − довільна підмножина в R, то множину $A_{\#} = \left\{a \in R \middle| \forall n \in \mathbb{N}_0 : a^{(n)} \in A\right\}$ називають *диференціалом* цієї множини. Позначимо через $|A|$ та $\langle A \rangle$ найменші диференціальний та радикальний диференціальний k-ідеал, які містять A.

Власний ідеал P напівкільця R називають *первинним*, якщо з $ab \in P$ випливає, що $a \in P$ або $b \in P$. Максимальний серед диференціальних ідеалів, які не перетинаються з деякою мультиплікативно замкненою підмножиною напівкільця R, називають *квазіпервинним. Радикалом ідеалу* I напівкільця R називають $\sqrt{I} = \left\{r \in R \middle| \exists n \in \mathbb{N} : r^n \in I\right\}$. Ідеал I називають *радикальним*, якщо $I = \sqrt{I}$. Неправильно, що радикал кожного диференціального ідеалу є диференціальним ідеалом. Наприклад, радикал диференціального ідеалу $\left(x^3, 3\right)$ диференціального напівкільця $\mathbb{N}_0[x]$ не є диференціальним. Диференціальне напівкільце R є *dmsp-напівкільцем*, якщо радикал кожного диференціального k-ідеалу диференціальний ідеал. Поняття $dmsp$-напівкільце є напівкільцевим аналогом кільця Кейгера [5], яке в різні часи називали спеціальним або d-MP-кільцем.

Теорема 1. *Такі умови еквівалентні:*

1. *R є $dmsp$-напівкільцем;*

2. *Якщо S − мультиплікативно замкнена підмножина в R, I − диференціальний k-ідеал R, який не перетинається з нею, то кожний диференціальний k-ідеал напівкільця R, максимальний серед тих, які містять I і не перетинаються з S, є первинним;*

3. *Якщо P − первинний k-ідеал R, то $P_{\#}$ − диференціальний первинний k-ідеал R;*

4. *Якщо A − довільна підмножина в R, то $\langle A \rangle = \sqrt{|A|}$.*

5. *Будь-який квазіпервинний k-ідеал I напівкільця R є первинним.*

6. *Будь-який квазіпервинний k-ідеал I напівкільця R є радикальним.*

У $dmsp$-напівкільці максимальний серед диференціальних k-ідеалів є первинним. Кожне диференціально тривіальне напівкільце є $dmsp$-напівкільцем. Нульове напівкільце є $dmsp$-напівкільцем. Кожне диференціальне напівполе є $dmsp$-напівкільцем. Кожне кільце Кейгера є $dmsp$-напівкільцем.

Теорема 2. *Будь-яке диференціальне напівкільце, яке містить $\mathbb{Q}_+$, є $dmsp$-напівкільцем.*

Доведення. Нехай R − довільне напівкільце, P − його первинний k-ідеал і $a, b \in R \setminus P_{\#}$. Існують такі $m, n \in \mathbb{N}_0$, що $a^{(m)} \notin P$ і $b^{(n)} \notin P$, а $a^{(k)} \in P$ і $b^{(l)} \in P$ для всіх $k < m$ і $l < n$. Тоді $(ab)^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k a^{(m+n-k)} b^{(k)}$. Якщо $k < n$, то $C_{m+n}^k a^{(m+n-k)} b^{(k)} \in P$, а якщо $n < k$, то $a^{(m+n-k)} \in P$. Тому $C_{m+n}^k a^{(m+n-k)} b^{(k)} \in P$. Коли ж $k = n$, $a^{(m)} \notin P$, $b^{(n)} \notin P$, а оскільки P − первинний ідеал, то $a^{(m)} b^{(n)} \notin P$. Тоді $C_{m+n}^n a^{(m)} b^{(n)} \notin P$. Отже, $(ab)^{(m+n)} \notin P$, тобто $ab \notin P_{\#}$. Отже, $P_{\#}$ − первинний ідеал. З властивостей диференціала $(\ )_{\#}$ випливає, що $P_{\#}$ є k-ідеалом. Згідно з теоремою 1, R є $dmsp$-напівкільцем. ■

Твердження 1. *Якщо A − підмножина напівкільця R і $A \subseteq P$, де P − первинний диференціальний k-ідеал в R, то $\langle A \rangle \subseteq P$.*

Доведення. $\langle A\rangle$ є перетином всіх первинних диференціальних k-ідеалів, які містять A. Якщо A міститься в кожному первинному диференціальному k-ідеалі P напівкільця R, то і перетин міститься в P, тобто $\langle A\rangle \subseteq P$. ■

Наслідок 1. *Якщо I − будь-який k-ідеал, P − первинний диференціальний k-ідеал напівкільця R і $I \subseteq P$, то $\langle I\rangle \subseteq P$.*

З урахуванням означень отримуємо такі твердження.

Твердження 2. *Якщо R − dmsp-напівкільце, $I \subseteq P$, де I − будь-який ідеал, а P − первинний диференціальний ідеал в R, то $\sqrt{I} \subseteq P$.*

Твердження 3. *Якщо A підмножина напівкільця R і $a \in R$, то $a \in \langle A\rangle$ тоді і тільки тоді, коли кожний первинний диференціальний k-ідеал, який містить підмножину A, також містить елемент a. Більше того, $1 \in \langle A\rangle$ тоді і тільки тоді, коли A не міститься в жодному первинному диференціальному k-ідеалі з R.*

Доведення. Нехай $a \in \langle A\rangle$ і існує такий первинний диференціальний k-ідеал P, який містить A, але не містить a. $\langle A\rangle \subseteq P$ за твердженням 2. Звідси випливає, що $a \notin \langle A\rangle$. Суперечність. Друга частина твердження випливає з першої, якщо $a = 1$. □

Твердження 4. *Якщо R − диференціальне dmsp-напівкільце, довільна підмножина в R і $a \in R$ − довільний елемент, то $a \in P$ для кожного первинного диференціального k-ідеалу P, який містить A, тоді і тільки тоді, коли $a^n \in |A|$ для деякого $n \in \mathbb{N}$. Зокрема, $1 \in |A|$ тоді і тільки тоді, коли A не міститься в жодному первинному диференціальному k-ідеалі напівкільця R.*

Доведення. Якщо R − диференціальне $dmsp$-напівкільце і A − довільна підмножина в R, то з теореми 1 випливає, що $\langle A\rangle = \sqrt{|A|}$. Звідси $a \in \langle A\rangle$ еквівалентна тому, що $a^n \in |A|$ для деякого $n \in \mathbb{N}$. Згідно з твердженням 3, $a^n \in |A|$ для деякого $n \in \mathbb{N}$ тоді і тільки тоді, коли кожний первинний диференціальний k-ідеал, який містить підмножину A, також містить елемент a. Якщо $a = 1$, з цього випливає друга частина твердження. □

Множину $Spec_k(R)$ всіх первинних k-ідеалів називають *k-спектром напівкільця R*. Встановлено [2], що $Spec_k(R) \neq \varnothing$, а також, що k-напівкільце є топ-напівкільцем, тобто на ньому можна задати топологію Зариського, вважаючи замкненими множини виду $V(I) = \{P \in Spec_k(R) | I \subseteq P\}$ для будь-якого ідеалу I напівкільця R. Позначимо через $dSpec_k(R)$ множину всіх первинних диференціальних k-ідеалів напівкільця R і назвемо її *первинним диференціальним k-спектром диференціального напівкільця R*.

Твердження 5. *Якщо R − диференціальне dmsp-напівкільце, то $dSpec_k(R) \neq \varnothing$.*

Доведення. Застосуємо твердження 4 до $A = \{0\}$ і $a = 1$, пам'ятаючи, що $1 \neq 0$. □

Нехай X − довільна підмножина диференціального напівкільця R. Множину всіх первинних диференціальних k-ідеалів, які містять X, позначимо через $V_k^d(X) = \{P \in dSpec_k(R) | X \subseteq P\}$, а її доповнення $D_k^d(X) = dSpec_k(R) \setminus V_k^d(X)$.

Якщо $f \in R$, то $V_k^d(f) = \{P \in dSpec_k(R) | f \in P\}$ і $D_k^d(f) = \{P \in dSpec_k(R) | f \notin P\}$.

На $dSpec_k(R)$ можна задати індуковану топологію. Замкнені множини $dSpec_k(R)$ мають вигляд $V_k^d(X) = V(X) \bigcap dSpec_k(R)$, де X – довільна підмножина напівкільця R.

Твердження 6. *Нехай R – диференціальне k-напівкільце. Тоді виконуються такі властивості:*

1. $V_k^d(R) = \varnothing$ *і* $V_k^d(0) = dSpec_k(R)$;
2. $\bigcap_{i\in} V_k^d(X_i) = V_k^d\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)$ *для будь-якої сім'ї підмножин* $\{X_i\}$ *в* R;
3. $\bigcap_{i\in} V_k^d(I_i) = V_k^d\left(\sum_{i\in I} I_i\right)$ *для будь-якої сім'ї ідеалів* $\{I_i\}$ *в* R;
4. $V_k^d(I) \bigcup V_k^d(J) = V_k^d(I \bigcap J) = V_k^d(IJ)$ *для будь-яких ідеалів* I *та* J *в* R.

Доведення виконуємо безпосередньою перевіркою умов.

Твердження 7. *Нехай R – диференціальне напівкільце. Тоді:*

1. *Якщо* $X \subseteq Y$, *то* $V_k^d(Y) \subseteq V_k^d(X)$.
2. *Якщо* X *– довільна підмножина в* R, *то* $V_k^d(X) = V_k^d(\langle X \rangle)$.
3. *Якщо* I *– k-ідеал в* R, *то* $V_k^d(I) = V_k^d(\langle I \rangle)$. *Якщо* R *– dmsp-напівкільце, а* I *– довільний ідеал в* R, *то* $V_k^d(I) = V_k^d(\sqrt{I})$.
4. *Якщо* X *та* Y *– довільні підмножини напівкільця* R, *то* $V_k^d(X) \subseteq V_k^d(Y)$ *тоді і тільки тоді, коли* $\langle Y \rangle \subseteq \langle X \rangle$.
5. *Якщо* $V_k^d(I) \subseteq V_k^d(J)$, *то* $J \subseteq \langle I \rangle$ *для довільних ідеалів* I *та* J *напівкільця* R.
6. $V_k^d(I) = V_k^d(J)$ *тоді і тільки тоді, коли* $\langle I \rangle = \langle J \rangle$ *для довільних ідеалів* I *та* J *напівкільця* R.

Доведення. 1. Якщо $P \in V_k^d(Y)$, то $Y \subseteq P$, але $X \subseteq Y$, *тому* $X \subseteq P$. Отже, $P \in V_k^d(X)$. Таким чином, $V_k^d(Y) \subseteq V_k^d(X)$.

2. Якщо X – довільна підмножина напівкільця R, то $X \subseteq \langle X \rangle$. За пунктом 1 цього твердження $V_k^d(\langle X \rangle) \subseteq V_k^d(X)$. Навпаки, якщо $P \in V_k^d(X)$, то $X \subseteq P$, а тому за твердженням 1 $\langle X \rangle \subseteq P$. Тоді $P \in V_k^d(\langle X \rangle)$. Отже, $V_k^d(X) \subseteq V_k^d(\langle X \rangle)$. Звідси випливає рівність.

3. Пункт 3 є наслідком з пункту 2 та твердження 2.

4. Нехай $\langle Y \rangle \subseteq \langle X \rangle$ і $P \in V_k^d(X)$. Тоді $X \subseteq P$, звідки за твердженням 1 отримуємо, що $\langle X \rangle \subseteq P$. Але з припущення, що $\langle Y \rangle \subseteq \langle X \rangle$, маємо $\langle Y \rangle \subseteq P$. Отже, $P \in V_k^d(\langle Y \rangle)$. Оскільки $Y \subseteq \langle Y \rangle$, то звідси за пунктом 1 маємо $V_k^d(\langle Y \rangle) \subseteq V_k^d(Y)$. Звідси $P \in V_k^d(Y)$. Отже, доведено, що $V_k^d(X) \subseteq V_k^d(Y)$.

5. Якщо $V_k^d(I) \subseteq V_k^d(J)$, то за пунктом 4 $\langle J \rangle \subseteq \langle I \rangle$, але $J \subseteq \langle J \rangle$, тому $J \subseteq \langle I \rangle$, що і треба довести.

6. Нехай $V_k^d(I) = V_k^d(J)$. Тоді за пунктом 2 $V_k^d(I) = V_k^d(\langle I \rangle)$ і $V_k^d(J) = V_k^d(\langle J \rangle)$. Тому, зокрема, $V_k^d(I) \subseteq V_k^d(\langle J \rangle)$, звідки згідно з доведе-

ним у пункті 5 випливає, що $\langle J\rangle \subseteq \langle I\rangle$, а також $V_k^d(J)\subseteq V_k^d(\langle I\rangle)$, тому $\langle I\rangle \subseteq \langle J\rangle$. ∎

Твердження 8. *Нехай R − диференціальне напівкільце. Тоді:*

1. $D_k^d(0)=\varnothing$ і $D_k^d(R)=dSpec_k(R)$;

2. Якщо $f,g\in R$, то $V_k^d(fg)=V_k^d(f)\cap V_k^d(g)$;

3. $V_k^d(f)\subseteq V_k^d(g)$ тоді і тільки тоді, коли $\langle g\rangle \subseteq \langle f\rangle$.

Доведення випливає з твердження 7, бо $D_k^d(f)=dSpec_k(R)\setminus V_k^d(f)$, $f\in R$.

Твердження 9. *Сім'я множин $D_k^d(f)$, $f\in R$, утворює відкриту базу топології Зариського простору $dSpec_k(R)$.*

Доведення. Нехай U − відкрита множина. Доведемо, що її можна записати як об'єднання відкритих множин вигляду $D_k^d(f)$, тобто $U=\bigcup_{f\in I}D_k^d(f)$. Нехай $P\in U$. Тоді існує такий диференціальний ідеал I, що $U=dSpec_k(R)\setminus V_k^d(I)$. Тоді $P\notin V_k^d(I)$, тобто $I\not\subset P$. Таким чином, існує такий елемент $f\in I$, що $f\notin P$. Це означає, що $P\in D_k^d(f)$. Тоді $P\in \bigcup_{f\in I}D_k^d(f)$. Отже, доведено, що $U\subseteq \bigcup_{f\in I}D_k^d(f)$. Навпаки, якщо $P\in \bigcup_{f\in I}D_k^d(f)$, то $P\in D_k^d(f)$ для деякого $f\in I$, а тому $f\notin P$. Це означає, що $I\not\subset P$, тобто $P\notin V_k^d(I)$. Таким чином, з $P\in dSpec_k(R)\setminus V_k^d(I)$ випливає, що $P\in U$. ∎

Теорема 3. *Нехай R − диференціальне k-напівкільце. Топологічний простір $dSpec_k(R)$ є T_o.*

Доведення. Нехай R − диференціальне k-напівкільце. За [2, теорема 2.17] $Spec_k(R)$ є T_0-простором; $dSpec_k(R)$ є його підпростором з індукованою топологією, тому він також є T_0-простором. □

Нагадаємо, що *ретракція* − це неперервне відображення топологічного простору X на його підпростір A, яке зберігає всі точки цього підпростору.

Теорема 4. *Якщо R − диференціальне dmsp-напівкільце, то існує ретракція $\rho_A : Spec_k(R)\to dSpec_k(R)$*

Доведення. Побудуємо відображення $\rho : Spec_k(R)\to dSpec_k(R)$ так: кожному первинному k-ідеалу P поставимо у відповідність його диференціал $P_\#$, який є первинним диференціальним k-ідеалом. З означення оператора $(\ )_\#$ випливає, що $f\notin A_\#$ тоді і тільки тоді, коли існує такий $n\in\mathbb{N}_0$, що $f^{(n)}\notin A$. Доведемо рівність

$$\rho^{-1}\left(D_k^d(f)\right)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}D\left(f^{(n)}\right).$$

Нехай $P\in\rho^{-1}\left(D_k^d(f)\right)$. Тоді $\rho(P)=P_\#\in D_k^d(f)$, а тому існує такий $n\in\mathbb{N}_0$, що $f^{(n)}\notin P$, а тому $P\in D\left(f^{(n)}\right)$. Отже, $P\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}D\left(f^{(n)}\right)$. Якщо ж $P\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}D\left(f^{(n)}\right)$, то існує такий $n\in\mathbb{N}_0$, що $P\in D\left(f^{(n)}\right)$, звідки $f^{(n)}\notin P$, тому $f\notin P_\#$. Оскільки $P_\#$ є первинним диференціальним ідеалом в R, то

$P_{\#} \in dSpec_k(R)$. Таким чином, $P_{\#} \in D_k^d(f)$, а отже, $P \in \rho^{-1}\left(D_k^d(f)\right)$. З наведеної рівності випливає, що відображення ρ неперервне. За властивостями диференціала $(\ )_{\#}$, $(P_{\#})_{\#} = P_{\#}$, тому відображення ρ є тотожним на $dSpec_k(R)$, а отже, ретракцією. ■

Твердження 10. *Якщо R – диференціальне dmsp-напівкільце і $\rho : Spec_k(R) \to dSpec_k(R)$ – ретракція, то $\rho(D(f)) = D_k^d(f)$ для будь-якої головної відкритої множини $D(f)$ простору $Spec_k(R)$.*

Доведення. Якщо $P \in D(f)$, то $\rho(P) = P_{\#} \in dSpec_k(R)$, причому з $f \notin P$ і $P_{\#} \subseteq P$ випливає, що $f \notin P_{\#}$, тобто $P \in D_k^d(f)$. ■

Нагадаємо, що головна відкрита множина $D(f)$ простору $Spec_k(R)$ складається з первинних ідеалів напівкільця R, які не містять елемента f.

Теорема 5. *Нехай R – диференціальне k-напівкільце, яке є dmsp-напівкільцем. Множини $D_k^d(f)$ простору $dSpec_k(R)$ є компактними для будь-якого $f \in R$.*

Доведення. Головні відкриті множини *D*(*f*) простору $Spec_k(R)$ є компактними [2, теорема 2.15]. За твердженням 10, $D_k^d(f)$ – компактна множина. ■

Наслідок. *Нехай R – диференціальне k-напівкільце, яке є dmsp-напівкільцем. Топологічний простір $dSpec_k(R)$ є компактним.*

1. *Chandramouleeswaran M., Thiruveni V*. On derivations of semirings // Advances in Algebra. – 2010. – **1**. – P. 123–131.
2. *Ebrahimi Atani S., Ebrahimi Atani R*. A Zariski topology for k-semirings // Quasigroups and related systems. – 2012. – **20**. – P. 29–36.
3. *Golan J. S*. Semirings and their Applications – Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999. – 382 p.
4. *Hebisch U., Weinert H. J*. Semirings: Algebraic Theory and Applications in Computer Science – Singapore: World Scientific, 1998. – 362 p.
5. *Keigher W*. Prime differential ideals in differential rings // Contributions to Algebra: A Collection of Papers Dedicated to Ellis Kolchin. – New York: Aademic Press, 1977. – P. 239–249.
6. *Thierrin G*. Insertion of languages and differential semirings // Where Mathematics, Computer Science, Linguistics and Biology Meet. – Dordrecht; Boston: Kluwer Academic, 2001. – P. 287–296.
7. *Vandiver H. S*. Note on a simple type of algebras in which the cancellation law of addition does not hold // Bull. Am. Math. Soc. – 1934. – **40.** – P. 916–920.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ k-СПЕКТРЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛУКОЛЕЦ

Исследован первичный дифференциальный k-спектр дифференциального полукольца R. Показано, что для k-полукольца этот спектр будет T_0. Установлены некоторые свойства dmsp-полуколец. Доказано, что первичный дифференциальный k-спектр коммутативного dmsp-полукольца будет компактным пространством.

ON THE DIFFERENTIAL k-SPECTRUM OF DIFFERENTIAL SEMIRINGS

Prime differential k-spectrum of a differential semiring R is investigated. It is shown that it is T_0 for a k-semiring. Some properties of dmsp-semirings are investigated. It is proved that a prime differential k-spectrum of a commutative dmsp-semiring is a compact topological space.

Львів. нац. ун-т
ім. Івана Франка, Львів

Одержано
01.09.16