УДК 517.524

Т. М. Антонова, С. М. Возна

ПРО ОДНУ ОЗНАКУ ЗБІЖНОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ З ДІЙСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Встановлено деякі достатні умови монотонності та обмеженості послідовностей фігурних та звичайних наближень парного порядку гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду (типу Siemaszko) з дійсними елементами. За додаткових обмежень на елементи доведено збіжність і фігурну збіжність досліджуваних гіллястих ланцюгових дробів до однієї і тієї самої границі.

Вступ. Одним із ефективних алгоритмів розвинення аналітичних функцій у неперервні дроби є побудова відповідних неперервних дробів для степеневих рядів, в які розвиваються ці функції [11, 13]. Під час розв'язування задачі відповідності між формальним подвійним степеневим рядом і послідовністю раціональних наближень функції двох змінних Х. Й. Кучмінська [11], а також J. Murphy, M. R. O'Donohoe [14] запропонували першу конструкцію відповідних гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД). Такий двовимірний аналог неперервних дробів пізніше отримав назву двовимірного неперервного дробу (ДНД). W. Siemaszko побудував іншу конструкцію двовимірного відповідного ГЛД [15], яку надалі називатимемо гіллястим ланцюговим дробом спеціального вигляду (типу Siemaszko).

Основи аналітичної теорії ДНД викладені у монографії [12], а також численних журнальних публікаціях. Натомість, на сьогодні відомо небагато праць, присвячених ГЛД спеціального вигляду (типу Siemaszko) [16, 2].

Для застосувань неперервних дробів та їх багатовимірних узагальнень важливе значення мають їх збіжність та обчислювальна стійкість. Тому під час вивчення ланцюгових дробів різної структури в першу чергу розглядали питання збіжності. На відміну від неперервних дробів, наближення яких будують однозначно, в аналітичній теорії багатовимірних узагальнень неперервних дробів досліджують властивості різних наближень залежно від конкретної задачі [8, 12]. Нижче розглянуто достатні умови, виконання яких забезпечує звичайну і фігурну збіжність ГЛД спеціального вигляду (типу Siemaszko) до однієї і тієї самої границі. При цьому вжито методику, застосовану під час вивчення властивостей звичайних наближень ГЛД загального вигляду [1, 3, 4, 9], а також звичайних і фігурних наближень ДНД [5–7] з дійсними елементами.

Гіллясті ланцюгові дроби спеціального вигляду. Наближення ГЛД. Формули різниці між двома наближеннями ГЛД. Дослідимо гіллясті ланцюгові дроби спеціального вигляду

$$b_0 + F_{0,0} + \underset{i=1}{\overset{\infty}{D}} \frac{a_{i,0}}{1 + F_{i,0}} + \underset{i=1}{\overset{\infty}{D}} \frac{a_{0,i}}{1 + F_{0,i}},$$

$$F_{i,j} = \underset{p=1}{\overset{\infty}{D}} \frac{a_{p+i,p+j}}{1}, \quad i = 0,1,\dots, \quad j = 0,1,\dots, \tag{1}$$

де $b_0, a_{i,j}$, $i = 0, 1, \dots$, $j = 0, 1, \dots$, $i + j \ge 1$ – дійсні сталі або функції двох дійсних змінних z_1, z_2, визначені в області $D \subset \mathrm{R}^2$. ГЛД, всі елементи якого сталі, називатимемо числовим. Якщо серед цих елементів є функції дійсних змінних z_1, z_2, то такий ГЛД називатимемо функціональним. Існують різні способи побудови наближень (підхідних дробів) ГЛД загального і спеціального вигляду.

ISSN 1810-3022. Прикл. проблеми мех. і. мат. – 2016. – Вип. 14. – С. 16–24.

Звичайне n-те наближення (звичайний n-й підхідний дріб) ГЛД (1) означимо так:

$$f_0 = b_0, \quad f_n = b_0 + F_{0,0}^{(n)} + \mathop{D}_{i=1}^{n} \frac{a_{i,0}}{1 + F_{i,0}^{(n-i)}} + \mathop{D}_{i=1}^{n} \frac{a_{0,i}}{1 + F_{0,i}^{(n-i)}}, n = 1,2,\ldots, \tag{2}$$

де

$$F_{i,0}^{(0)} = F_{0,i}^{(0)} = 0, \quad F_{i,0}^{(k)} = \mathop{D}_{p=1}^{k} \frac{a_{p+i,p}}{1}, \quad F_{0,i}^{(k)} = \mathop{D}_{p=1}^{k} \frac{a_{p,p+i}}{1}, \quad i = 0,1,\ldots, \quad k = 1,2,\ldots. \tag{3}$$

Фігурне n-те наближення (n-й фігурний підхідний дріб) ГЛД (1) W. Siemaszko означив так:

$$\tilde{f}_0 = b_0, \quad \tilde{f}_n = b_0 + F_{0,0}^{([n/2])} + \mathop{D}_{i=1}^{n} \frac{a_{i,0}}{1 + F_{i,0}^{([(n-i)/2])}} + \mathop{D}_{i=1}^{n} \frac{a_{0,i}}{1 + F_{0,i}^{([(n-i)/2])}}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{4}$$

де $[a]$ – ціла частина дійсного числа a.

Залишками звичайних наближень (2), (3) ГЛД (1) називають вирази

$$Q_{i,0}^{(0)} = 1, \quad Q_{i,0}^{(k+1)} = 1 + F_{i,0}^{(k+1)} + \frac{a_{i+1,0}}{Q_{i+1,0}^{(k)}}, \quad i = 1,2, \ldots, \quad k = 0,1,2,\ldots, \tag{5}$$

$$Q_{0,i}^{(0)} = 1, \quad Q_{0,i}^{(k+1)} = 1 + F_{0,i}^{(k+1)} + \frac{a_{0,i+1}}{Q_{0,i+1}^{(k)}}, \quad i = 1,2, \ldots, \quad k = 0,1,2,\ldots, \tag{6}$$

а залишками наближень (3) звичайних ланцюгових дробів (2) – вирази

$$Q_{k+i,k}^{(0)} = 1, \quad Q_{k+i,k}^{(p)} = 1 + \frac{a_{k+1+i,k+1}}{Q_{k+1+i,k+1}^{(p-1)}}, \quad p = 1,2, \ldots, \quad k = 1,2, \ldots, \quad i = 0,1,\ldots, \tag{7}$$

$$Q_{k,k+i}^{(0)} = 1, \quad Q_{k,k+i}^{(p)} = 1 + \frac{a_{k+1,k+1+i}}{Q_{k+1,k+1+i}^{(p-1)}}, \quad p = 1,2, \ldots, \quad k = 1,2, \ldots, \quad i = 0,1,\ldots. \tag{8}$$

Залишками фігурних наближень (4) ГЛД (1) є вирази

$$\tilde{Q}_{i,0}^{(0)} = 1, \quad \tilde{Q}_{i,0}^{(k+1)} = 1 + F_{i,0}^{([(k+1)/2])} + \frac{a_{i+1,0}}{\tilde{Q}_{i+1,0}^{(k)}}, \quad i = 1,2, \ldots, \quad k = 0,1,2,\ldots, \tag{9}$$

$$\tilde{Q}_{0,i}^{(0)} = 1, \quad \tilde{Q}_{0,i}^{(k+1)} = 1 + F_{0,i}^{([(k+1)/2])} + \frac{a_{0,i+1}}{\tilde{Q}_{0,i+1}^{(k)}}, \quad i = 1,2, \ldots, \quad k = 0,1,2,\ldots. \tag{10}$$

Враховуючи позначення (5)–(10), запишемо:

$$f_n = b_0 + F_{0,0}^{(n)} + \frac{a_{1,0}}{Q_{1,0}^{(n-1)}} + \frac{a_{0,1}}{Q_{0,1}^{(n-1)}}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{11}$$

$$\tilde{f}_n = b_0 + F_{0,0}^{([n/2])} + \frac{a_{1,0}}{\tilde{Q}_{1,0}^{(n-1)}} + \frac{a_{0,1}}{\tilde{Q}_{0,1}^{(n-1)}}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{12}$$

$$F_{0,0}^{(p)} = \frac{a_{1,1}}{Q_{1,1}^{(p-1)}}, \quad F_{i,0}^{(p)} = \frac{a_{i+1,1}}{Q_{i+1,1}^{(p-1)}}, \quad F_{0,i}^{(p)} = \frac{a_{1,i+1}}{Q_{i+1,1}^{(p-1)}}, \quad i = 1,2,\ldots, \quad p = 1,2,\ldots. \tag{13}$$

Вважаємо, що наближення f_k, $\tilde{f}_k$ мають сенс, якщо під час згортання дробу (обчислення їх значень за формулами (6)–(13)) не виникне невизначеність типу $\frac{0}{0}$ (припускаємо, що $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$ і $\frac{\alpha_1}{0} + \ldots + \frac{\alpha_m}{0} = \frac{0}{0}$, якщо $m > 1$).

ГЛД (1) називаєть *збіжним* (*фігурно збіжним за Siemaszko*), якщо, починаючи з деякого номера n_0, всі його звичайні (фігурні) наближення мають сенс, та існує скінченна границя $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ ($\tilde{f} = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{f}_n$), значення якої можна вважати значенням збіжного ГЛД. Послідовність $\{f_{2k}\}$,($\{\tilde{f}_{2k}\}$), $n=1,2,\ldots$, називають *парною* (*фігурною парною*) *частиною* ГЛД (1). Парна (фігурна парна) частина ГЛД (1) збігається, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} f_{2n}$ ($\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{f}_{2n}$).

Під час вивчення поведінки послідовностей наближень ГЛД загального або спеціального вигляду використовують формули різниці двох їх наближень. Для ГЛД (1) формула різниці між двома фігурними наближеннями за Siemaszko має вигляд [8]

$$\tilde{f}_n-\tilde{f}_m=$$

$$=F_{0,0}^{([n/2])}-F_{0,0}^{([m/2])}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(F_{i,0}^{([(n-i)/2])}-F_{i,0}^{([(m-i)/2])}\right)\prod\limits_{j=1}^{i}\left(-a_{j,0}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{i}\tilde{Q}_{j,0}^{(n-j)}\tilde{Q}_{j,0}^{(m-j)}}+\frac{(-1)^m\prod\limits_{j=1}^{m+1}a_{0,j}}{\prod\limits_{j=1}^{m+1}\tilde{Q}_{0,j}^{(n-j)}\prod\limits_{j=1}^{m}\tilde{Q}_{0,j}^{(m-j)}}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(F_{0,i}^{([(n-i)/2])}-F_{0,i}^{([(m-i)/2])}\right)\prod\limits_{j=1}^{i}\left(-a_{0,j}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{i}\tilde{Q}_{0,j}^{(n-j)}\tilde{Q}_{0,j}^{(m-j)}}+\frac{(-1)^m\prod\limits_{j=1}^{m+1}a_{j,0}}{\prod\limits_{j=1}^{m+1}\tilde{Q}_{j,0}^{(n-j)}\prod\limits_{j=1}^{m}\tilde{Q}_{j,0}^{(m-j)}},\quad n>m. \tag{14}$$

Формулу різниці двох наближень неперервних дробів (2) можна записати так:

$$F_{i,j}^{(p)}-F_{i,j}^{(r)}=(-1)^r\frac{\prod\limits_{k=1}^{r+1}a_{k+i,k+j}}{\prod\limits_{k=1}^{r+1}Q_{k+i,k+j}^{(p-k)}\prod\limits_{k=1}^{r}Q_{k+i,k+j}^{(r-k)}},\quad r=0,1,\ldots,p>r,\quad i=0,1,\ldots. \tag{15}$$

Використовуючи методику виведення формули (14), встановили:

$$f_n-f_m=F_{0,0}^{(n)}-F_{0,0}^{(m)}+\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^i\left(F_{i,0}^{(n-i)}-F_{i,0}^{(m-i)}\right)\prod\limits_{j=1}^{i}a_{j,0}}{\prod\limits_{j=1}^{i}Q_{j,0}^{(n-j)}Q_{j,0}^{(m-j)}}+\frac{(-1)^m\prod\limits_{j=1}^{m+1}a_{0,j}}{\prod\limits_{j=1}^{m+1}Q_{0,j}^{(n-j)}\prod\limits_{j=1}^{m}Q_{0,j}^{(m-j)}}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^i\left(F_{0,i}^{(n-i)}-F_{0,i}^{(m-i)}\right)\prod\limits_{j=1}^{i}a_{0,j}}{\prod\limits_{j=1}^{i}Q_{0,j}^{(n-j)}Q_{0,j}^{(m-j)}}+\frac{(-1)^m\prod\limits_{j=1}^{m+1}a_{j,0}}{\prod\limits_{j=1}^{m+1}Q_{j,0}^{(n-j)}\prod\limits_{j=1}^{m}Q_{j,0}^{(m-j)}},\quad n>m, \tag{16}$$

$$\tilde{f}_n-f_m=$$

$$=F_{0,0}^{([n/2])}-F_{0,0}^{(m)}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(F_{i,0}^{([(n-i)/2])}-F_{i,0}^{(m-i)}\right)\prod\limits_{j=1}^{i}\left(-a_{j,0}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{i}\tilde{Q}_{j,0}^{(n-j)}Q_{j,0}^{(m-j)}}+\frac{(-1)^m\prod\limits_{j=1}^{m+1}a_{j,0}}{\prod\limits_{j=1}^{m+1}\tilde{Q}_{j,0}^{(n-j)}\prod\limits_{j=1}^{m}Q_{j,0}^{(m-j)}}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(F_{0,i}^{([(n-i)/2])}-F_{0,i}^{(m-i)}\right)\prod\limits_{j=1}^{i}\left(-a_{0,j}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{i}\tilde{Q}_{0,j}^{(n-j)}Q_{0,j}^{(m-j)}}+\frac{(-1)^m\prod\limits_{j=1}^{m+1}a_{0,j}}{\prod\limits_{j=1}^{m+1}\tilde{Q}_{0,j}^{(n-j)}\prod\limits_{j=1}^{m}Q_{0,j}^{(m-j)}},\quad m=1,2,\ldots,\ n\geq 2m+1, \tag{17}$$

$$f_n - \tilde{f}_m = F_{0,0}^{(n)} - F_{0,0}^{([m/2])} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(F_{i,0}^{(n-i)} - F_{i,0}^{([(m-i)/2])}\right)\prod_{j=1}^{i}\left(-a_{j,0}\right)}{\prod_{j=1}^{i} Q_{j,0}^{(n-j)}\tilde{Q}_{j,0}^{(m-j)}} + \frac{(-1)^m \prod_{j=1}^{m+1} a_{j,0}}{\prod_{j=1}^{m+1} Q_{j,0}^{(n-j)} \prod_{j=1}^{m} \tilde{Q}_{j,0}^{(m-j)}} +$$

$$+\sum_{i=1}^{m} \frac{\left(F_{0,i}^{(n-i)} - F_{0,i}^{((m-i)/2)}\right)\prod_{j=1}^{i}\left(-a_{0,j}\right)}{\prod_{j=1}^{i} Q_{0,j}^{(n-j)}\tilde{Q}_{0,j}^{(m-j)}} + \frac{(-1)^m \prod_{j=1}^{m+1} a_{0,j}}{\prod_{j=1}^{m+1} Q_{0,j}^{(n-j)} \prod_{j=1}^{m} \tilde{Q}_{0,j}^{(m-j)}}, \quad n > m. \tag{18}$$

Формули (14)−(18) побудували у припущенні, що всі залишки $\tilde{Q}_{k,0}^{(p)}$, $\tilde{Q}_{0,k}^{(p)}$, $Q_{k,0}^{(p)}$, $Q_{0,k}^{(p)}$, $Q_{k,j}^{(r)}$, $Q_{j,k}^{(r)}$, які фігурують у них, не дорівнюють нулю.

Основні результати. Сформулюємо і доведемо теорему про достатні умови, за яких $\lim\limits_{n\to\infty} f_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{f}_{2n} < \infty$ та $f = \tilde{f} < \infty$.

Теорема. *Нехай елементи ГЛД (1) задовольняють такі умови:*

$$a_{i,0} \le 0, \quad a_{0,i} \le 0, \quad a_{k+1,1} \ge 0, \quad a_{1,k+1} \ge 0, \quad i = 1,2,\dots, \quad k = 0,1,\dots, \tag{19}$$

$$-g_{i+k,k}\left(1 - g_{i+k-1,k-1}\right) \le a_{i+k,k} \le 0, \quad -g_{k,k+i}\left(1 - g_{k-1,i+k-1}\right) \le a_{i+k,k} \le 0,$$
$$i = 0,1,2,\dots, \quad k = 2,3,\dots, \tag{20}$$

$$\left|a_{2p,0}\right| \ge \left(g_{2p-1,0} + 1 + \frac{a_{2p,1}}{g_{2p,1}}\right)\left(1 + \frac{a_{2p+1,1}}{g_{2p+1,1}} + \frac{\left|a_{2p+1,0}\right|}{g_{2p+1,0}}\right), \quad p = 1,2,\dots, \tag{21}$$

$$\left|a_{0,2p}\right| \ge \left(g_{0,2p-1} + 1 + \frac{a_{1,2p}}{g_{1,2p}}\right)\left(1 + \frac{a_{1,2p+1}}{g_{1,2p+1}} + \frac{\left|a_{0,2p+1}\right|}{g_{0,2p+1}}\right), \quad p = 1,2,\dots, \tag{22}$$

де $g_{i,k}$ − *такі сталі, що*

$$g_{i,0} > 0, \quad g_{0,i} > 0, \quad 0 < g_{i,k} < 1, \quad i = 1,2,\dots, \quad k = 1,2,\dots,. \tag{23}$$

Тоді парна частина і фігурна парна частина ГЛД (1) (послідовності наближень парного порядку $\left\{\tilde{f}_{2p}\right\}$, $\left\{f_{2p}\right\}$, $p = 1,2,\dots$*) збігаються, причому*

$$\tilde{f}_0 \le \tilde{f}_2 \le \dots \le \tilde{f}_{2p} \le \dots \le \left|b_0\right| + \frac{\left|a_{1,1}\right|}{g_{1,1}} + \frac{\left|a_{1,0}\right|}{g_{1,0}} + \frac{\left|a_{0,1}\right|}{g_{0,1}},$$

$$f_0 \le f_2 \le \dots \le f_{2p} \le \dots \le \left|b_0\right| + \frac{\left|a_{1,1}\right|}{g_{1,1}} + \frac{\left|a_{1,0}\right|}{g_{1,0}} + \frac{\left|a_{0,1}\right|}{g_{0,1}}, \quad \lim_{p\to\infty} \tilde{f}_{2p} = \lim_{p\to\infty} f_{2p}.$$

Якщо, крім того,

$$1 + a_{2p-1,0} > 0, \quad 1 + a_{0,2p-1} > 0, \quad p = 1,2,\dots, \tag{24}$$

то ГЛД (1) збігається і фігурно за Siemaszko збігається до однієї і тієї самої границі.

Д о в е д е н н я. Оцінимо значення залишків $\tilde{Q}_{k,0}^{(p)}$, $\tilde{Q}_{0,k}^{(p)}$, $Q_{k,0}^{(p)}$, $Q_{0,k}^{(p)}$, $Q_{k,j}^{(p)}$, $Q_{j,k}^{(p)}$ за умов (19)−(23).

Беручи до уваги позначення (7), легко показати [12], що за умов (20), (23)

$$1 \ge Q_{k+i,k}^{(p)} \ge g_{k+i,k}, \quad 1 \ge Q_{k,k+i}^{(p)} \ge g_{k,k+i}, \quad i = 0,1,\dots, \quad k = 1,2,\dots, \quad p = 0,1,\dots. \tag{25}$$

Отже,

$$F_{i,0}^{(0)}=F_{0,i}^{(0)}=0,\quad a_{i+1,1}\le F_{i,0}^{(p)}=\frac{a_{i+1,1}}{Q_{i+1,1}^{(p-1)}}\le\frac{a_{i+1,1}}{g_{i+1,1}},$$

$$a_{1,i+1}\le F_{0,i}^{(p)}=\frac{a_{1,i+1}}{Q_{1,i+1}^{(p-1)}}\le\frac{a_{1,i+1}}{g_{1,i+1}}.\quad i=0,1,\dots,\quad p=1,2,\dots. \tag{26}$$

Для довільних $p=1,2,\dots$, враховуючи формули (9), (10), умови (21) та нерівності (26), маємо:

$$\tilde{Q}_{2p,0}^{(0)}=1,\quad -\tilde{Q}_{2p-1,0}^{(1)}=\left|\tilde{Q}_{2p-1,0}^{(1)}\right|=\frac{\left|a_{2p,0}\right|}{1}-1\ge g_{2p-1,0}.$$

Якщо $p>1$, то

$$1+a_{2p-1,1}\le\tilde{Q}_{2p-2,0}^{(2)}=1+F_{2p-2,0}^{(1)}+\frac{\left(-a_{2p-1,0}\right)}{\left(-\tilde{Q}_{2p-1,0}^{(1)}\right)}\le 1+\frac{a_{2p-1,1}}{g_{2p-1,1}}+\frac{\left|a_{2p-1,0}\right|}{g_{2p-1,0}},$$

$$-\tilde{Q}_{2p-3,0}^{(3)}=\frac{-a_{2p-2,0}}{\tilde{Q}_{2p-2,0}^{(2)}}-1-F_{2p-3,0}^{(1)}\ge\frac{\left|a_{2p-2,0}\right|}{1+\frac{a_{2p-1,1}}{g_{2p-1,1}}+\frac{\left|a_{2p-1,0}\right|}{g_{2p-1,0}}}-1-\frac{a_{2p-2,1}}{g_{2p-2,1}}\ge g_{2p-3,0}.$$

Продовжуючи аналогічно, методом математичної індукції можна довести, що

$$1+a_{2p+1,1}\le\tilde{Q}_{2p,0}^{(2k)}=1+F_{2p,0}^{(k)}+\frac{\left|a_{2p+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{2p+1,0}^{(2k-1)}\right|}\le 1+\frac{a_{2p+1,1}}{g_{2p+1,1}}+\frac{\left|a_{2p+1,0}\right|}{g_{2p+1,0}},\ p,k=1,2,\dots, \tag{27}$$

$$-\tilde{Q}_{2p-1,0}^{(2k+1)}\ge\frac{\left|a_{2p,0}\right|}{\tilde{Q}_{2p,0}^{(2k)}}-1-F_{2p-1,0}^{(k)}\ge\frac{\left|a_{2p,0}\right|}{1+\frac{a_{2p+1,1}}{g_{2p+1,1}}+\frac{\left|a_{2p+1,0}\right|}{g_{2p+1,0}}}-1-\frac{a_{2p,1}}{g_{2p,1}}\ge g_{2p-1,0}, \tag{28}$$

$$p=1,2,\dots,\qquad k=0,1,\dots.$$

Діючи так само, можна переконатись у правильності нерівностей

$$1+a_{1,2p+1}\le\tilde{Q}_{0,2p}^{(2k)}\le 1+\frac{a_{1,2p+1}}{g_{1,2p+1}}+\frac{\left|a_{0,2p+1}\right|}{g_{0,2p+1}},\quad p=1,2,\dots,\ k=1,2,\dots, \tag{29}$$

$$-\tilde{Q}_{0,2p-1}^{(2k+1)}\ge g_{0,2p-1},\quad p=1,2,\dots,\quad k=0,1,\dots. \tag{30}$$

Беручи до уваги формулу (15) і оцінки (25), одержимо:

$$F_{i,0}^{(p)}-F_{i,0}^{(r)}=\frac{(-1)^r\prod_{j=1}^{r+1}a_{j+i,j}}{\prod_{j=1}^{r+1}Q_{j+i,j}^{(p-j)}\prod_{j=1}^{r}Q_{j+i,j}^{(r-j)}}=\frac{a_{i+1,1}\prod_{j=2}^{r+1}\left(-a_{j+i,j}\right)}{\prod_{j=1}^{r+1}Q_{j+i,j}^{(p-j)}\prod_{j=1}^{r}Q_{j+i,j}^{(r-j)}}\ge 0,\quad p>r,\ r=1,2,\dots. \tag{31}$$

Отже, для довільних $i=1,2,\dots$ послідовності $\left\{F_{i,0}^{(p)}\right\}$, $\left\{F_{0,i}^{(p)}\right\}$, а також $\left\{F_{0,0}^{(p)}\right\}$ неспадні: $F_{i,0}^{(0)}\le F_{i,0}^{(1)}\le F_{i,0}^{(2)}\le\dots$, $F_{0,i}^{(0)}\le F_{0,i}^{(1)}\le F_{0,i}^{(2)}\le\dots$, $F_{0,0}^{(0)}\le F_{0,0}^{(1)}\le F_{0,0}^{(2)}\le\dots$.

З формули (14) і нерівностей (27)–(31) з урахуванням умов (19) випливає, що

$$\tilde{f}_{2n}-\tilde{f}_{2m}=F_{0,0}^{(n)}-F_{0,0}^{(m)}+\sum_{i=1}^{2m}\frac{\left(F_{i,0}^{([n-i/2])}-F_{i,0}^{([m-i/2])}\right)\prod_{j=1}^{i}\left(-a_{j,0}\right)}{\prod_{j=1}^{i}\tilde{Q}_{j,0}^{(2n-j)}\tilde{Q}_{j,0}^{(2m-j)}}-\frac{\prod_{j=1}^{2m+1}\left(-a_{j,0}\right)}{\prod_{j=1}^{2m+1}\tilde{Q}_{j,0}^{(2n-j)}\prod_{j=1}^{2m}\tilde{Q}_{j,0}^{(2m-j)}}+$$

$$+\sum_{i=1}^{2m}\frac{\left(F_{0,i}^{([n-i/2])}-F_{0,i}^{([m-i/2])}\right)\prod_{j=1}^{i}\left(-a_{0,j}\right)}{\prod_{j=1}^{i}\tilde{Q}_{0,j}^{(2n-j)}\tilde{Q}_{0,j}^{(2m-j)}}-\frac{\prod_{j=1}^{2m+1}\left(-a_{0,j}\right)}{\prod_{j=1}^{2m+1}\tilde{Q}_{0,j}^{(2n-j)}\prod_{j=1}^{2m}\tilde{Q}_{0,j}^{(2m-j)}}=$$

$$=\left|F_{0,0}^{(n)}-F_{0,0}^{(m)}\right|+\sum_{i=1}^{2m}\frac{\left|F_{i,0}^{([n-i/2])}-F_{i,0}^{([m-i/2])}\right|\prod_{j=1}^{i}\left|a_{j,0}\right|}{\prod_{j=1}^{i}\left|\tilde{Q}_{j,0}^{(2n-j)}\tilde{Q}_{j,0}^{(2m-j)}\right|}-\frac{\prod_{j=1}^{2m+1}\left|a_{j,0}\right|}{\prod_{j=1}^{2m}\left|\tilde{Q}_{j,0}^{(2m-j)}\tilde{Q}_{j,0}^{(2n-j)}\right|\left(-\left|\tilde{Q}_{2m+1,0}^{(2n-2m-1)}\right|\right)}+$$

$$+\sum_{i=1}^{2m}\frac{\left|F_{0,i}^{([n-i/2])}-F_{0,i}^{([n-i/2])}\right|\prod_{j=1}^{i}\left|a_{0,j}\right|}{\prod_{j=1}^{i}\left|\tilde{Q}_{0,j}^{(2n-j)}\tilde{Q}_{0,j}^{(2m-j)}\right|}-\frac{\prod_{j=1}^{2m+1}\left|a_{0,j}\right|}{\prod_{j=1}^{2m}\left|\tilde{Q}_{0,j}^{(2n-j)}\tilde{Q}_{0,j}^{(2m-j)}\right|\left(-\left|\tilde{Q}_{2m+1,j}^{(2n-2m-1)}\right|\right)}\geq 0,$$

а це означає, що послідовність $\left\{\tilde{f}_{2p}\right\}$, $p=1,2,\ldots$, неспадна:

$$\tilde{f}_0\leq\tilde{f}_2\leq\ldots\leq\tilde{f}_{2p}\leq\ldots\quad.$$

Крім того,

$$\tilde{f}_{2p}=\left|b_0\right|+F_{0,0}^{(p)}+\frac{\left(-\left|a_{1,0}\right|\right)}{\left(-\left|\tilde{Q}_{1,0}^{(2p-1)}\right|\right)}+\frac{\left(-\left|a_{0,1}\right|\right)}{\left(-\left|\tilde{Q}_{0,1}^{(2p-1)}\right|\right)}\leq b_0+\frac{\left|a_{1,1}\right|}{g_{1,1}}+\frac{\left|a_{1,0}\right|}{g_{1,0}}+\frac{\left|a_{0,1}\right|}{g_{0,1}},$$

тому послідовність $\left\{\tilde{f}_{2p}\right\}$, $p=1,2,\ldots$, збігається.

Використовуючи описану вище методику, означення (5)−(6) залишків звичайних наближень, нерівності (22), (25), можна переконатись у правильності таких оцінок:

$$1+a_{2p+1,1}\leq Q_{2p,0}^{(2k)}\leq 1+\frac{a_{2p+1,1}}{g_{2p+1,1}}+\frac{\left|a_{2p+1,0}\right|}{g_{2p+1,0}},\quad -Q_{2p-1,0}^{(2k-1)}\geq g_{2p-1,0},\qquad p,k=1,2,\ldots,\tag{32}$$

$$1+a_{1,2p+1}\leq Q_{0,2p}^{(2k)}\leq 1+\frac{a_{1,2p+1}}{g_{1,2p+1}}+\frac{\left|a_{0,2p+1}\right|}{g_{0,2p+1}},\quad -Q_{0,2p-1,}^{(2k-1)}\geq g_{0,2p-1},\qquad p,k=1,2,\ldots\tag{33}$$

Враховуючи формулу (16), умови (19) і нерівності (25), (32), (33), дійшли висновку, що $f_0\leq f_2\leq\ldots\leq f_{2p}\leq\ldots\leq b_0+\frac{\left|a_{1,1}\right|}{g_{1,1}}+\frac{\left|a_{1,0}\right|}{g_{1,0}}+\frac{\left|a_{0,1}\right|}{g_{0,1}}$, звідки випливає збіжність послідовності $\left\{f_{2p}\right\}$, $p=1,2,\ldots$.

З формул (17), (18), умови (19) і нерівностей (27)−(33) одержимо:

$$\tilde{f}_{2n}-f_{2m}=F_{0,0}^{(n)}-F_{0,0}^{(2m)}+$$

$$+\sum_{i=1}^{2m}\frac{\left(F_{i,0}^{([n-i/2])}-F_{i,0}^{(2m-i)}\right)\prod_{j=1}^{i}\left|a_{j,0}\right|}{\prod_{j=1}^{i}\left|\tilde{Q}_{j,0}^{(2n-j)}Q_{j,0}^{(2m-j)}\right|}-\frac{\prod_{j=1}^{2m+1}\left|a_{j,0}\right|}{\tilde{Q}_{2m+1,0}^{(2n-2m-1)}\prod_{j=1}^{2m}\left|\tilde{Q}_{j,0}^{(2n-j)}Q_{j,0}^{(2m-j)}\right|}+$$

$$+\sum_{i=1}^{2m}\frac{\left(F_{0,i}^{([n-i/2])}-F_{0,i}^{(2m-i)}\right)\prod_{j=1}^{i}\left|a_{0,j}\right|}{\prod_{j=1}^{i}\left|\tilde{Q}_{0,j}^{(2n-j)}Q_{0,j}^{(2m-j)}\right|}-\frac{\prod_{j=1}^{2m+1}\left|a_{0,j}\right|}{\tilde{Q}_{0,2m+1}^{(2n-2m-1)}\prod_{j=1}^{2m}\left|\tilde{Q}_{0,j}^{(2n-j)}Q_{0,j}^{(2m-j)}\right|}\geq 0,$$

$$m=1,2,\ldots,\quad n\geq 2m+1,$$

$$f_{2m}-\tilde f_{2l}=F_{0,0}^{(2m)}-F_{0,0}^{(l)}+$$

$$+\sum_{i=1}^{2l}\frac{\left(F_{i,0}^{(2m-i)}-F_{i,0}^{([l-i/2])}\right)\prod\limits_{j=1}^{i}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{i}\left|Q_{j,0}^{(2m-j)}\tilde Q_{j,0}^{(2l-j)}\right|}-\frac{\prod\limits_{j=1}^{2l+1}|a_{j,0}|}{Q_{2l+1,0}^{(2m-2l-1)}\prod\limits_{j=1}^{2l}\left|Q_{j,0}^{(2m-j)}\tilde Q_{j,0}^{(2l-j)}\right|}+$$

$$+\sum_{i=1}^{2l}\frac{\left(F_{0,i}^{(2m-i)}-F_{0,i}^{([l-i/2])}\right)\prod\limits_{j=1}^{i}|a_{0,j}|}{\prod\limits_{j=1}^{i}\left|Q_{0,j}^{(2m-j)}\tilde Q_{0,j}^{(2l-j)}\right|}-\frac{\prod\limits_{j=1}^{2l+1}|a_{0,j}|}{Q_{0,2l+1}^{(2m-2l-1)}\prod\limits_{j=1}^{2l}\left|Q_{0,j}^{(2m-j)}\tilde Q_{0,j}^{(2l-j)}\right|}\geq 0,\quad m>l,$$

отже, $\tilde f_{2n}\geq f_{2m}\geq\tilde f_{2l}\geq\tilde f_0$, $l=1,2,\ldots$, $m>l,n>2m$, тому $\lim\limits_{p\to\infty}\tilde f_{2p}=\lim\limits_{m\to\infty}f_{2m}$.

Розглянемо тепер залишки вигляду $\tilde Q_{2p+1-r,0}^{(r)}$, $Q_{2p+1-r,0}^{(r)}$, $r=0,\ldots,2p$, $p=1,2,\ldots$, з урахуванням додаткової умови (24). Маємо:

$$\tilde Q_{2p+1,0}^{(0)}=1,\quad 1\geq\tilde Q_{2p,0}^{(1)}=1+\frac{a_{2p+1,0}}{\tilde Q_{2p+1,0}^{(0)}}=1+a_{2p+1,0}>0,$$

$$Q_{2p+1,0}^{(0)}=1,\quad 1\geq Q_{2p,0}^{(1)}=1+\frac{a_{2p+1,1}}{Q_{2p+1,1}^{(0)}}+\frac{a_{2p+1,0}}{Q_{2p+1,0}^{(0)}}=1+a_{2p+1,1}+a_{2p+1,0}>0,$$

$$-\tilde Q_{2p-1,0}^{(2)}=\frac{|a_{2p,0}|}{\tilde Q_{2p,0}^{(1)}}-\left(1+\frac{a_{2p,1}}{Q_{2p,1}^{(0)}}\right)\geq\frac{|a_{2p,0}|}{1}-\frac{a_{2p,1}}{g_{2p,1}}-1\geq g_{2p-1,0},$$

$$-Q_{2p-1,0}^{(2)}=\frac{|a_{2p,0}|}{\tilde Q_{2p,0}^{(1)}}-\left(1+\frac{a_{2p,1}}{Q_{2p,1}^{(1)}}\right)\geq\frac{|a_{2p,0}|}{1+a_{2p+1,1}+a_{2p+1,0}}-\frac{a_{2p,1}}{g_{2p,1}}-1\geq g_{2p-1,0},$$

$$1+a_{2p-1,1}\leq\tilde Q_{2p-2,0}^{(3)}=1+F_{2p-2,0}^{(1)}+\frac{\left(-a_{2p-1,0}\right)}{\left(-\tilde Q_{2p-1,0}^{(2)}\right)}\leq 1+\frac{a_{2p-1,1}}{g_{2p-1,1}}+\frac{|a_{2p-1,0}|}{g_{2p-1,0}},$$

$$1+a_{2p-1,1}\leq Q_{2p-2,0}^{(3)}=1+F_{2p-2,0}^{(3)}+\frac{\left(-a_{2p-1,0}\right)}{\left(-Q_{2p-1,0}^{(2)}\right)}\leq 1+\frac{a_{2p-1,1}}{g_{2p-1,1}}+\frac{|a_{2p-1,0}|}{g_{2p-1,0}}.$$

Продовжуючи міркувати аналогічно, одержимо:

$$1+a_{2p+1,1}\leq\tilde Q_{2p,0}^{(2k+1)}\leq 1+\frac{a_{2p+1,1}}{g_{2p+1,1}}+\frac{|a_{2p+1,0}|}{g_{2p+1,0}},\ p=1,2,\ldots,\ k=1,2,\ldots,\tag{34}$$

$$-\tilde Q_{2p-1,0}^{(2k)}\geq g_{2p-1,0},\quad p=1,2,\ldots,\quad k=1,2,\ldots,\tag{35}$$

$$1+a_{2p+1,1}\leq Q_{2p,0}^{(2k+1)}\leq 1+\frac{a_{2p+1,1}}{g_{2p+1,1}}+\frac{|a_{2p+1,0}|}{g_{2p+1,0}},\quad p=1,2,\ldots,\ k=1,2,\ldots,\tag{36}$$

$$-Q_{2p-1,0}^{(2k)}\geq g_{2p-1,0},\quad p=1,2,\ldots,\quad k=1,2,\ldots.\tag{37}$$

Аналогічні співвідношення справджуються і для $\tilde Q_{0,2p+1-r}^{(r)}$, $Q_{0,2p+1-r}^{(r)}$, $r=0,\ldots,2p$, $p=1,2,\ldots$.

З нерівностей (27)–(33), (34)–(37) випливає, що

$$\prod_{j=1}^{i}\tilde{Q}_{j,0}^{(2m+3-j)}\tilde{Q}_{j,0}^{(2m-j)}=\prod_{j=1}^{i}\left|\tilde{Q}_{j,0}^{(2m+3-j)}\tilde{Q}_{j,0}^{(2m-j)}\right|,\quad i=1,\ldots,2m,$$

$$\prod_{j=1}^{i}\tilde{Q}_{0,j}^{(2m+3-j)}\tilde{Q}_{0,j}^{(2m-j)}=\prod_{j=1}^{i}\left|\tilde{Q}_{0,j}^{(2m+3-j)}\tilde{Q}_{0,j}^{(2m-j)}\right|,\quad i=1,\ldots,2m,$$

$$\prod_{j=1}^{2m+1}\tilde{Q}_{j,0}^{(2m+3-j)}\prod_{j=1}^{2m}\tilde{Q}_{j,0}^{(2m-j)}=-\left|\tilde{Q}_{2m+1,0}^{(2)}\right|\prod_{j=1}^{2m}\left|\tilde{Q}_{j,0}^{(2m-j)}\tilde{Q}_{j,0}^{(2m+3-j)}\right|,$$

$$\prod_{j=1}^{2m+1}\tilde{Q}_{0,j}^{(2m+3-j)}\prod_{j=1}^{2m}\tilde{Q}_{0,j}^{(2m-j)}=-\left|\tilde{Q}_{0,2m+1}^{(2)}\right|\prod_{j=1}^{2m}\left|\tilde{Q}_{0,j}^{(2m-j)}\tilde{Q}_{0,j}^{(2m+3-j)}\right|,$$

тому $\tilde{f}_{2m+3}-\tilde{f}_{2m}\ge 0$, а також

$$\sum_{i=1}^{2m+3}\frac{\left(F_{i,0}^{([m+2-i/2])}-F_{i,0}^{([m+(3-i)/2])}\right)\prod_{j=1}^{i}|a_{j,0}|}{\prod_{j=1}^{i}\tilde{Q}_{j,0}^{(2m+4-j)}\tilde{Q}_{j,0}^{(2m+3-j)}}=\sum_{i=1}^{2m+2}\frac{\left|F_{i,0}^{([m+2-i/2])}-F_{i,0}^{([m+(3-i)/2])}\right|\prod_{j=1}^{i}|a_{j,0}|}{\prod_{j=1}^{i}\left|\tilde{Q}_{j,0}^{(2m+4-j)}\tilde{Q}_{j,0}^{(2m+3-j)}\right|},$$

$$\sum_{i=1}^{2m+3}\frac{\left(F_{0,i}^{([m+2-i/2])}-F_{0,i}^{([m+(3-i)/2])}\right)\prod_{j=1}^{i}|a_{0,j}|}{\prod_{j=1}^{i}\tilde{Q}_{0,j}^{(2m+4-j)}\tilde{Q}_{0,j}^{(2m+3-j)}}=\sum_{i=1}^{2m+2}\frac{\left|F_{0,i}^{([m+2-i/2])}-F_{0,i}^{([m+(3-i)/2])}\right|\prod_{j=1}^{i}|a_{0,j}|}{\prod_{j=1}^{i}\left|\tilde{Q}_{0,j}^{(2m+4-j)}\tilde{Q}_{0,j}^{(2m+3-j)}\right|},$$

$$\prod_{j=1}^{2m+4}\tilde{Q}_{j,0}^{(2m+4-j)}\prod_{j=1}^{2m+3}\tilde{Q}_{j,0}^{(2m+3-j)}=-\left|\tilde{Q}_{2m+3,0}^{(1)}\right|\prod_{j=1}^{2m+2}\left|\tilde{Q}_{j,0}^{(2m+3-j)}\tilde{Q}_{j,0}^{(2m+4-j)}\right|,$$

$$\prod_{j=1}^{2m+4}\tilde{Q}_{0,j}^{(2m+4-j)}\prod_{j=1}^{2m+3}\tilde{Q}_{0,j}^{(2m+3-j)}=-\left|\tilde{Q}_{0,2m+3}^{(1)}\right|\prod_{j=1}^{2m+2}\left|\tilde{Q}_{0,j}^{(2m+3-j)}\tilde{Q}_{0,j}^{(2m+4-j)}\right|,$$

тому $\tilde{f}_{2m+4}-\tilde{f}_{2m+3}\ge 0$.

Отже, $\tilde{f}_{2m}\le\tilde{f}_{2m+3}\le\tilde{f}_{2m+4}$, тому $\lim\limits_{p\to\infty}\tilde{f}_{2p}=\lim\limits_{m\to\infty}\tilde{f}_{2m+1}$, а це означає, що за сформульованих умов ГЛД (1) фігурно збіжний за Siemaszko.

Міркуючи аналогічно, можна показати, що $f_{2m}\le f_{2m+3}\le f_{2m+4}$, тому $\lim\limits_{p\to\infty}f_{2p}=\lim\limits_{m\to\infty}f_{2m+1}$. Беручи до уваги ще й рівність $\lim\limits_{p\to\infty}\tilde{f}_{2p}=\lim\limits_{m\to\infty}f_{2m}$, дійшли висновку про збіжність і фігурну збіжність ГЛД (1) до однієї і тієї самої границі. Теорему доведено.

1. *Антонова Т. М.* Деякі властивості гіллястих ланцюгових дробів з недодатними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 1. – С. 11–15.
2. *Антонова Т. М., Возна С. М.* Дослідження абсолютної та фігурно абсолютної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Восточно-Европейский журн. передовых технологий. Математика и кибернетика – прикладные аспекты. – 2015. – 6/4(78) – С. 119–126.
3. *Антонова Т. М., Гладун В. Р.* Деякі достатні умови збіжності та стійкості гіллястих ланцюгових дробів зі знакозмінними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 2004. – **47**, № 4. – С. 27–35.
4. *Антонова Т. М., Гладун В. Р.* Деякі достатні умови збіжності та абсолютної стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з дійсними елементами // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2014. – Вип. 12 – С. 16–24.
5. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Про властивості деяких послідовностей наближень парного порядку двовимірних неперервних дробів // Наук. вісник Ужгород. нац. ун-ту. Сер. Математика і інформатика. – 2006. – Вип. 12–13. – С. 4–9.
6. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Про властивості послідовностей фігурних набли-

жень двовимірних неперервних дробів спеціального вигляду з дійсними елементами // Мат. вісник НТШ. – 2007. – **4**. – С. 5–16.

7. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Деякі достатні умови збіжності послідовностей фігурних наближень парного і непарного порядків для двовимірних неперервних дробів з дійсними елементами // Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка». Сер. Фізико-математичні науки. – 2009.– № 660. – С. 49–55.
8. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
9. *Гладун В. Р.* Ознаки збіжності та стійкості гіллястих ланцюгових дробів із від'ємними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 4. – С. 16–26.
10. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения / Пер. с англ. – Москва: Мир, 1985. – 414 с.
11. *Кучмінська Х. Й.* Відповідний і приєднаний гіллясті ланцюгові дроби для подвійного степеневого ряду// Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1978. – № 7. – С. 614–618.
12. *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики, 2010. – 218 с.
13. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions with applications. – Amsterdam: Noth Holland, 1992. – 606p.
14. *Murphy J., O'Donohoe M. R.* A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fractions // J. Comp. Appl. Math. – 1978. – № 4. – P. 181–190.
15. *Siemaszko W. J.* Branched continued fractions for double power series // J. Comp. Appl. Math. – 1980. – **6**, № 2. – P. 121–125.
16. *Siemaszko W. J.* On some conditions for convergence of branched continued fractions // Lecture Notes in Math. – 1981. – **888**. – P. 363–370.

ОБ ОДНОМ ПРИЗНАКЕ СХОДИМОСТИ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Установлены некоторые достаточные условия монотонности и ограниченности последовательностей фигурных и обычных приближений парного порядка ветвящихся цепных дробей специального вида (типа Siemaszko) с действительными элементами. При дополнительных ограничениях на элементы доказана сходимость и фигурная сходимость исследуемых ветвящихся цепных дробей к одному и тому же пределу.

ON ONE CONVERGENCE CRITERION OF BRANCHED CONTINUED FRACTIONS OF THE SPECIAL FORM WITH REAL ELEMENTS

We establish some sufficient conditions of monotonicity and boundedness for sequences of figured and ordinary approximants of even order for branched continued fractions of special form (Siemaszko's type) with real elements. Under additional restrictions on elements convergence and figured convergence of investigated branched continued fractions to the same limit are proved.

Нац. ун-т «Львівська політехніка», Львів

Одержано
20.05.16