

**ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРІАЛУ НЕОДНОРІДНОЇ ВЗДОВЖ РАДІУСА ПОРОЖНИСТОЇ КУЛІ, ЯКІ ЗАБЕЗПЕЧУЮТЬ ВІДСУТНІСТЬ У НІЙ РАДІАЛЬНИХ НАПРУЖЕНЬ, КОЛИ ЗАДАНІ ТЕПЛОВІ НАВАНТАЖЕННЯ**

*Статична задача термопружності у напруженнях для порожнистої кулі з залежними від радіуса характеристиками матеріалу та сталими на поверхнях навантаженнями зведена до розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма другого роду для радіальної компоненти тензора напружень. На основі цього рівняння встановлено зв'язок між температурою та характеристиками матеріалу, який є умовою відсутності радіальних напружень у кулі. Отримано точні аналітичні вирази, які зв'язують коефіцієнт теплопровідності та температурний коефіцієнт лінійного розширення, а також встановлено розподіл концентрації однієї зі складових матеріалу в межах моделі простої суміші, який забезпечує в кулі нульові радіальні напруження.*

Дослідження термонапруженого стану деталей механічних конструкцій, що працюють в умовах високих температур, набуває все більшого значення. Не менш важливо підібрати характеристики матеріалів для виготовлення таких елементів, щоб забезпечити їх міцність та надійність під інтенсивними тепловими навантаженнями.

Сьогодні функціонально градієнтні матеріали (ФГМ) використовують для виготовлення елементів устаткування. Їх перевагою порівняно з композитними є відсутність напружень на межі двох різних матеріалів, що не призводить до структурних пошкоджень виготовленого з них устаткування в широкому діапазоні температур [11]. Задачі визначення термонапруженого стану в неоднорідній або термочутливій кулі розв'язані, зокрема, у працях [3, 7–9, 12].

Під час проектування та виготовлення елементів механічних конструкцій потрібно знати, коли напруження в них відсутні або близькі до нуля. Я. С. Підстригач [5] запропонував умови відсутності температурних напружень в однорідних оболонках. Не менш важливо під час виготовлення деталей, що функціонують у таких умовах, оптимізувати характеристики неоднорідного матеріалу за координатою для компенсації термонапружень. Задачі ідентифікації термопружних полів за неповної інформації про теплове навантаження та оптимальне нагрівання тіл за обмежень на температуру чи напруження розглянуті у працях [4, 13].

Мета дослідження – підібрати характеристики ФГМ для виготовлення неоднорідної порожнистої кулі, щоб забезпечити в ній нульові радіальні напруження, коли задані теплові навантаження. Для цього класичну задачу термопружності у напруженнях звели до розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно радіальних напружень та стаціонарної задачі теплопровідності. Це рівняння використали для отримання зв'язку між температурним полем та характеристиками матеріалів, який є умовою відсутності радіальних напружень у неоднорідній кулі та має бути розв'язком відповідної стаціонарної задачі теплопровідності.

**Формулювання задачі.** Розглянемо неоднорідну вздовж радіальної координати порожнисту кулю з радіусами  $R_2$  зовнішньої та  $R_1$  внутрішньої поверхонь з заданими на них сталими навантаженнями  $p_1$ ,  $p_2$  відповідно. Вважаємо, що модуль пружності  $E$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu$ , коефіцієнт теплового лінійного розширення  $\alpha$  та коефіцієнт теплопровідності  $\lambda$  є неперервними функціями від радіальної координати  $\rho = r / R_2$ . Тоді внутрішню та зовнішню поверхні кулі подамо рівняннями  $\rho_1 = R_1 / R_2$ ,  $\rho_2 = R_2 / R_2 = 1$ .

Задачу термопружності, сформульовану в напруженнях, опишемо

- рівнянням рівноваги

$$\rho \frac{d\sigma_{rr}(\rho)}{d\rho} + 2(\sigma_{rr}(\rho) - \sigma_{\varphi\varphi}(\rho)) + \rho f_r(\rho) = 0,$$

вираженим через радіальні  $\sigma_{rr}$  та сумарні  $\sigma = \frac{1}{2}\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}$  ( $\sigma_{\varphi\varphi}$  – колові напруження) напруження

$$\frac{d}{d\rho}(\rho^3\sigma_{rr}(\rho)) = \rho^2(2\sigma(\rho) - \rho f_r(\rho)); \quad (1)$$

- зв'язками між тензорами деформацій та напружень

$$e_{rr}(\rho) = \frac{1}{E(\rho)}((1 + \nu(\rho))\sigma_{rr}(\rho) - 2\nu(\rho)\sigma(\rho)) + \Phi(T(\rho)), \quad (2)$$

$$e_{\varphi\varphi}(\rho) = \frac{1}{E(\rho)}\left((1 - \nu(\rho))\sigma(\rho) - \frac{1}{2}(1 + \nu(\rho))\sigma_{rr}(\rho)\right) + \Phi(T(\rho));$$

- рівнянням сумісності

$$\rho \frac{de_{\varphi\varphi}(\rho)}{d\rho} = e_{rr}(\rho) - e_{\varphi\varphi}(\rho),$$

яке з використанням виразів (2) має у напруженнях вигляд

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1 - \nu(\rho)}{E(\rho)}\sigma + \Phi(T(\rho))\right) = \frac{\sigma_{rr}}{2} \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1 + \nu(\rho)}{E(\rho)}\right) - \frac{1}{2} \frac{1 + \nu(\rho)}{E(\rho)} f_r(\rho); \quad (3)$$

- межовими умовами для радіальних напружень

$$\sigma_{rr}(\rho_1) = -p_1, \quad \sigma_{rr}(1) = -p_2. \quad (4)$$

У рівняннях та рівностях (1)–(4) введено позначення:  $f_r(\rho)$  – густина масових сил;  $e_{rr}(\rho)$ ,  $e_{\varphi\varphi}(\rho)$  – радіальна й колова компоненти тензора деформацій;  $\Phi(T(\rho)) = \alpha(\rho)[T(\rho) - T_0]$ ;  $T(\rho)$  – розподіл температури, отриманий експериментально або як розв'язок стаціонарного рівняння теплопровідності з класичними межовими умовам;  $T_0 = \text{const}$  – відлікова температура, коли відсутні деформації та напруження. Потрібно визначити розподіл фізико-механічних характеристик матеріалу, який призводить до нульових радіальних напружень у кулі. Розглянемо спочатку пряму задачу термопружності (1)–(4), яку зведемо до розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно радіальних напружень. Зокрема, вибір саме радіальних напружень як базових обумовлений тим, що наслідком рівняння рівноваги (1) за відсутності масових сил є відсутність також і колових напружень, якщо відсутні радіальні.

**Зведення задачі термопружності до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду [1].** Після інтегрування рівняння рівноваги (1) отримаємо зв'язок між радіальними та сумарними напруженнями:

$$\rho^3\sigma_{rr}(\rho) - \rho_1^3\sigma_{rr}(\rho_1) = \int_{\rho_1}^{\rho} \eta^2(2\sigma(\eta) - \eta f_r(\eta)) d\eta. \quad (5)$$

За умови  $\rho = 1$  з виразу (5) одержимо інтегральну умову, яку повинні задовольняти сумарні напруження:

$$\int_{\rho_1}^1 \eta^2(2\sigma(\eta) - \eta f_r(\eta)) d\eta = \rho_1^3 p_1 - p_2. \quad (6)$$

У результаті інтегрування рівняння суцільності (4) отримали залежність між сумарними і радіальними напруженнями:

$$\sigma(\rho) - \frac{1}{2} \frac{E(\rho)}{1-\nu(\rho)} \int_{\rho_1}^{\rho} \sigma_{rr}(\eta) \varphi'(\eta) d\eta = \frac{E(\rho)}{1-\nu(\rho)} \left[ B - \frac{1}{2} \int_{\rho_1}^{\rho} f_r(\eta) \varphi(\eta) d\eta - \Phi(T(\rho)) \right], \quad (7)$$

де  $\varphi(\rho) = \frac{1+\nu(\rho)}{E(\rho)}$ ;  $\varphi'(\rho) = \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1+\nu(\rho)}{E(\rho)} \right)$ ;  $B$  – константа, яку визначають з інтегральної умови (6).

Після інтегрування рівняння рівноваги (1) з використанням формули (7) і визначення сталої  $B$  дістанемо таке інтегральне рівняння для обчислення радіальних напружень:

$$\sigma_{rr}(\rho) + \int_{\rho_1}^1 K(\rho, \eta) \sigma_{rr}(\eta) d\eta = \Psi(\rho), \quad (8)$$

де

$$\Psi(\rho) = H(\rho) - \frac{H(1)}{\rho^3} \frac{V(\rho)}{V(1)} + Q(\rho) - \frac{Q(1)}{\rho^3} \frac{V(\rho)}{V(1)} + \frac{\rho_1^3 p_1}{\rho^3} \left[ \frac{V(\rho)}{V(1)} - 1 \right] - \frac{p_2}{\rho^3} \frac{V(\rho)}{V(1)}, \quad (9)$$

$$K(\rho, \eta) = \begin{cases} V(\eta) \left[ 1 - \frac{V(\rho)}{V(1)} \right] \frac{\varphi'(\eta)}{2\rho^3}, & \eta \leq \rho \\ V(\rho) \left[ 1 - \frac{V(\eta)}{V(1)} \right] \frac{\varphi'(\eta)}{2\rho^3}, & \eta \geq \rho \end{cases}, \quad (10)$$

$$V(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \eta^2 \frac{E(\eta)}{1-\nu(\eta)} d\eta, \quad H(\rho) = -\frac{1}{\rho^3} \int_{\rho_1}^{\rho} (2\eta^2 F(\eta) + \eta^3 f_r(\eta)) d\eta,$$

$$F(\rho) = \frac{1}{2} \frac{E(\rho)}{1-\nu(\rho)} \int_{\rho_1}^{\rho} f_r(\eta) \varphi(\eta) d\eta, \quad Q(\rho) = -\frac{2}{\rho^3} \int_{\rho_1}^{\rho} \eta^2 \frac{E(\eta)}{1-\nu(\eta)} \Phi(T(\eta)) d\eta, \quad (11)$$

$$2B = -\frac{1}{2} \int_{\rho_1}^1 \left[ 1 - \frac{V(\eta)}{V(1)} \right] \varphi'(\eta) \sigma_{rr}(\eta) d\eta - \frac{H(1)}{V(1)} - \frac{Q(1)}{V(1)} + \frac{\rho_1^3 p_1}{V(1)} - \frac{p_2}{V(1)}. \quad (12)$$

Інтегральне рівняння (8) є рівнянням Фредгольма другого роду, з розв'язку якого можна визначити радіальні напруження з урахуванням механічних межових умов (4) та заданого температурного поля. Ядро (10) інтегрального рівняння є неперервним і залежить лише від фізичних характеристик матеріалу та їх похідних за радіальною змінною. Права частина (9) інтегрального рівняння (8) містить доданки  $H(\rho)$ ,  $Q(\rho)$ , які враховують вплив масових сил і температурного поля відповідно.

Сумарні напруження можна знайти за формулами (7), (12), коліві – за  $\sigma_{\varphi\varphi}(\rho) = \sigma(\rho) - \frac{1}{2} \sigma_{rr}(\rho)$ , деформації – за виразами (2), радіальні переміщення  $u_r(\rho)$  – з формули  $e_{\varphi\varphi}(\rho) = u_r(\rho) / \rho$ , де  $u_r(\rho) = \bar{u}_r(\rho R_2) / R_2$  – переміщення в одиницях  $R_2$ ,  $\bar{u}_r(\rho R_2)$  – переміщення.

**Зв'язок між температурним полем та фізичними характеристиками матеріалу, який забезпечує нульові радіальні напруження.** Якщо прийняти, що по всій товщині порожнистої кулі радіальні напруження рівні нулю, то права частина рівняння (8) також дорівнюватиме нулю. Отже, на основі того ж інтегрального рівняння (8) розглядаємо обернену задачу, яка полягає у визначенні температурного поля, що задовольняє рівняння  $\Psi(\rho) = 0$ .

Рівняння  $\Psi(\rho) = 0$  з урахуванням явного вигляду виразів у (9) за відсутності масових сил і навантажень на поверхнях має вигляд

$$\int_{\rho_1}^{\rho} \eta^2 \frac{E(\eta)}{1-\nu(\eta)} \alpha(\eta) T_1(\eta) d\eta - \frac{V(\rho)}{V(1)} \int_{\rho_1}^1 \eta^2 \frac{E(\eta)}{1-\nu(\eta)} \alpha(\eta) T_1(\eta) d\eta = 0, \quad (13)$$

де  $T_1(\rho) = T(\rho) - T_0$ , а  $\Phi(\rho) = \alpha(\rho) T_1(\rho)$ . Якщо рівняння (13) продиференціювати по  $\rho$  та спростити, то отримаємо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду відносно температури  $T_1(\rho)$  з виродженим ядром

$$T_1(\rho) - \frac{1}{V(1)} \frac{1}{\alpha(\rho)} \int_{\rho_1}^1 V'(\eta) \alpha(\eta) T_1(\eta) d\eta = 0, \quad (14)$$

ненульовим розв'язком згідно з [6] є аналітичний вираз

$$T(\rho) = \frac{C}{\alpha(\rho)} + T_0, \quad (15)$$

де  $C = \bar{C} / V(1)$ , а отже, і  $\bar{C}$  – довільні сталі через існування власного значення ядра інтегрального рівняння (14).

**Визначення характеристик матеріалу.** Розглянемо задачу підбору такого матеріалу для виготовлення кулі, який забезпечить у ній нульові радіальні напруження, коли задане стаціонарне теплове навантаження. Розподіл температури (15) забезпечує нульові радіальні напруження. Тому він повинен задовольняти рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \lambda(\rho) \frac{dT(\rho)}{d\rho} \right) = 0. \quad (16)$$

і класичні умови на межах, наприклад

$$T(\rho_1) = T_1, \quad T(1) = T_2 \quad (17)$$

або

$$\left[ \lambda(\rho) \frac{dT(\rho)}{d\rho} + \beta_1 (T(\rho) - T_i) \right]_{\rho=\rho_1} = 0, \quad \left[ \lambda(\rho) \frac{dT(\rho)}{d\rho} + \beta_2 (T(\rho) - T_o) \right]_{\rho=1} = 0, \quad (18)$$

де  $\beta_1, \beta_2$  – коефіцієнти теплообміну з зовнішніми середовищами температур  $T_i$  та  $T_o$  всередині та зовні відповідно. Оскільки температурне поле (15) залежить від однієї сталої, умови (17) або (18) слід узгодити, тобто в умовах (17) можна задати значення температури тільки на одній з поверхонь, а другу визначити зі зв'язку  $(T_1 - T_0)\alpha(\rho_1) = (T_2 - T_0)\alpha(1)$ . Згідно з умовами (18) отримаємо зв'язок між температурами на обмежувальних поверхнях та коефіцієнтами теплообміну:

$$\frac{T_o - T_0}{T_i - T_0} = \left[ \frac{1}{\alpha(1)} - \frac{\lambda(1)}{\beta_2 \alpha^2(1)} \frac{d\alpha(1)}{d\rho} \right] \left[ \frac{1}{\alpha(\rho_1)} - \frac{\lambda(\rho_1)}{\beta_1 \alpha^2(\rho_1)} \frac{d\alpha(\rho_1)}{d\rho} \right]^{-1}.$$

Остання з формул вказує також на можливість впливати на температуру обмежувальних поверхонь через коефіцієнти теплообміну. Якщо підставити вираз (15) у рівняння (16), то отримаємо диференціальне рівняння, яке пов'язує коефіцієнти теплопровідності та лінійного розширення:

$$\frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \lambda(\rho) \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1}{\alpha(\rho)} \right) \right) = 0. \quad (19)$$

Воно має точні розв'язки для коефіцієнта теплопровідності

$$\lambda(\rho) = \frac{C_1 \alpha^2(\rho)}{\rho^2 \frac{d\alpha(\rho)}{d\rho}} \quad (20)$$

та температурного коефіцієнта лінійного розширення

$$\alpha(\rho) = \frac{1}{C_1 \int \frac{d\rho}{\rho^2 \lambda(\rho)} + C_2}, \quad (21)$$

де  $C_1, C_2$  – невідомі сталі інтегрування.

Оскільки створити неоднорідні матеріали, характеристики яких задовольняли б зв'язки (20) чи (21), поки що проблематично, використовували модель характеристик матеріалу, яка виражає їх для деяких двокомпонентних матеріалів через концентрацію та характеристики їх складових [9,10]. Застосуємо модель простої суміші або модель Фойгта [10]:

$$P(\rho) = (P_1 - P_2)S_1(\rho) + P_2, \quad (22)$$

де  $P_1, P_2$  – характеристики складових матеріалу,  $S_1(\rho)$  – об'ємна концентрація однієї зі складових матеріалу суміші,  $S_1(\rho) \in [0,1]$ .

З виразу (20) отримаємо диференціальне рівняння для концентрації матеріалу, якщо коефіцієнти теплопровідності та температурного лінійного розширення подані виразом (22):

$$\frac{dS_1(\rho)}{d\rho} = \frac{B_2 [(\alpha_1 - \alpha_2)S_1(\rho) + \alpha_2]^2}{\rho^2 [(\lambda_1 - \lambda_2)S_1(\rho) + \lambda_2]}. \quad (23)$$

Розв'язок рівняння (23) має вигляд

$$S_1(\rho) = \frac{\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot W(Y(\rho)) - \lambda_2\alpha_1 + \alpha_2\lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot W(Y(\rho))}, \quad (24)$$

де  $W(x)$  – W-функція Лямберта [2], що є розв'язком функціонального рівняння  $W(x) \cdot e^{W(x)} = x$ ,  $Y(\rho) = \frac{(\lambda_2\alpha_1 - \alpha_2\lambda_1) \cdot e^{Z(\rho)}}{\lambda_1 - \lambda_2}$ ,  $Z(\rho) = \frac{B_2(1 - B_1\rho) \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)^2}{\rho(\lambda_1 - \lambda_2)}$ ,

$B_2 = -\frac{C_1}{C(\alpha_1 - \alpha_2)}$ ,  $B_1$  – деяка стала інтегрування.

Якщо концентрація першого складника в суміші неперервно змінюється від заданого значення  $S_1^1$  на внутрішній поверхні кулі до деякого заданого  $S_1^2$  на зовнішній, то сталі

$$B_1 = \frac{\ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right) \cdot \rho_1 - (1 - \rho_1) \ln\left(\frac{y_2(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_2\alpha_1 - \alpha_2\lambda_1}\right)}{\ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right) \cdot \rho_1}, \quad B_2 = \frac{\ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right) \cdot \rho_1 \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(1 - \rho_1)}, \quad (25)$$

де

$$y_1 = z_1 e^{z_1}, \quad y_2 = z_2 e^{z_2}, \quad z_1 = \frac{\lambda_2\alpha_1 - \alpha_2\lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha_1 S_1^1 + \alpha_2(1 - S_1^1))},$$

$$z_2 = \frac{\lambda_2\alpha_1 - \alpha_2\lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha_1 S_1^2 + \alpha_2(1 - S_1^2))}.$$

Задання відомих концентрацій на поверхнях кулі еквівалентно умовам, які повинні задовольняти теплові навантаження на обмежувальних поверхнях кулі (17) або (18), тому що вираз (15) однозначно пов'язує температуру на межах і концентрацію через формулу (22).

Отже, визначено розподіл концентрації складників матеріалу неоднорідної порожнистої кулі для забезпечення в ній нульових радіальних напружень через вирази (21)–(23) з урахуванням сталих (24)–(26).

Відповідний розподіл температури можна знайти із виразу (17), записаного у вигляді

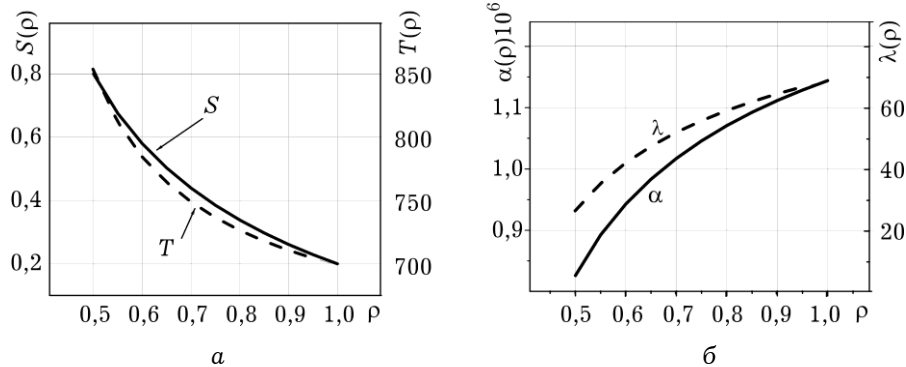
$$T(\rho) = \frac{C}{(\alpha_1 - \alpha_2)S_1(\rho) + \alpha_2} + T_0, \quad (26)$$

де сталу  $C$  обчислюють з умови на температуру на обмежувальній поверхні за відомою концентрацією на одній із меж.

**Приклад.** Проаналізуємо розподіли концентрації та температури у порожнистій неоднорідній кулі, виготовленій з двокомпонентного матеріалу, наприклад, суміші оксиду алюмінію та нікелю, якщо концентрація оксиду алюмінію змінюється в межах від  $S_1^1 = 0.2$  до  $S_1^2 = 0.8$ . У таблиці наведено значення фізичних характеристик складників [10].

Характеристика	Матеріал	
	оксид алюмінію (1)	нікель (2)
$\alpha$ , 1/К	$7,2 \cdot 10^{-6}$	$12,5 \cdot 10^{-6}$
$\lambda$ , Вт/(м·К)	12,5	83,7356

Вважаємо, що радіус внутрішньої поверхні кулі дорівнює половині радіуса зовнішньої, тобто  $\rho_1 = 0.5$ , на обмежувальних поверхнях виконуються умови (17), відлікова температура  $T_0 = 300\text{К}$ , а на зовнішній поверхні задано сталу температуру  $T(1) = 700\text{К}$ . У цьому випадку відповідні значення сталих такі:  $B_1 = -93.1715$ ,  $B_2 = 2.2886 \cdot 10^{12}$ ,  $C_1 = -7000.9222$ ,  $C_2 = 853.9952$ ,  $C = 4.576 \cdot 10^{-3}$ . Зміна об'ємної концентрації оксиду алюмінію в суміші та температурне поле подані на рисунку (графік а), а відповідні характеристики матеріалу, які забезпечують нульові радіальні напруження – на графіку б.



Розподіл об'ємної концентрації і температури (а), а також характеристик матеріалу (б) уздовж радіальної координати

**Висновки.** Статичну задачу термопружності у напруженнях у радіально-неоднорідній порожнистій кулі зведено до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду для радіального напруження з температурним полем, яке є розв'язком класичної стаціонарної задачі теплопровідності. З цього рівняння визначено зв'язок між температурним полем і фізико-механіч-

ними характеристиками матеріалу, який забезпечує в кулі нульові радіальні напруження.

З рівняння рівноваги без масових сил випливає, що через відсутність радіальних напружень коліви дорівнюють нулю.

У межах моделі простої суміші отримано точний аналітичний вираз для розподілу вздовж радіуса кулі концентрації матеріалу, який забезпечує нульові напруження в ній, якщо масові сили відсутні. Визначено розподіл концентрації матеріалу вздовж радіуса, який зумовлює нульові радіальні напруження для ФГМ, що складається з оксиду алюмінію та нікелю.

Одержані результати можна використати для ефективного підбору ФГМ, що забезпечують нульові напруження у конструкціях та деталях у вигляді порожнистих куль під час експлуатації за сталих теплових навантажень.

1. *Артемюк В. Ю., Калиняк Б. М.* Визначення температурного поля, що забезпечує нульові радіальні напруження у неоднорідній порожнистій кулі // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2014. – Вип. 12. – С. 104–111.
2. *Дубинов А. Е., Дубинова И. Д., Сайков С. К.* W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики. – Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2006. – 160 с.
3. *Калиняк Б. М., Яцків І. І.* Визначення напружень і переміщень у неоднорідній порожнистій кулі зведенням відповідної задачі термопружності до інтегральних рівнянь // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2009. – Вип. 7. – С. 142–150.
4. *Кушнір Р. М., Ясінський А. В.* Ідентифікація температурних поля і напружень термочутливого циліндра за поверхневими деформаціями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – 43, № 6. – С. 55–61.
5. *Підстригач Я. С.* Вибрані праці. – К.: Наук. думка, 1995. – 460 с.
6. *Полянин А. Д., Манжиров А. В.* Справочник по интегральным уравнениям: Точные решения. – М.: Факториал, 1998. – 432 с.
7. *Попович В. С., Вовк О. М., Гарматій Г. Ю.* Термопружний стан термочутливої кулі за умов складного теплообміну з оточуючим середовищем // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2005. – Вип. 3. – С. 99–106.
8. *Kushnir R., Protsiuk B.* Determination of the Thermal Fields and Stresses in Multilayer Solids by Means of the Constructed Green Functions // Encyclopedia of Thermal Stresses. Hetnarski, Richard B. (Ed.). – Springer, 2014. – P. 924–931.
9. *Obata Y., Noda N.* Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material // J. of Thermal Stresses. – 1994. – 17, №3. – P. 471–487.
10. *Shen H.-S.* Functionally graded materials: Nonlinear analysis of plates and shells – CRC Press, 2009. – 280 p.
11. *Tutuncu N., Temel B.* A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres // Composite Structures. – 2009. – 91. – P. 385–390.
12. *Yahya B., Mahdi G., Hamid T.* Analytical and numerical analysis for the FGM thick sphere under combined pressure and temperature loading. // Arch. Appl. Mech. – 2012. – 82, № 2. – P. 229–242.
13. *Yasinsky A.* Determination and Optimization of Stress State of Bodies on the Basis of Inverse Thermoelasticity Problems // Encyclopedia of Thermal Stresses. Hetnarski, Richard B. (Ed.). – Springer, 2014. – P. 916–924.

#### **ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛА НЕОДНОРОДНОГО ВДОЛЬ РАДИУСА ПОЛОГО ШАРА, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИЕ В НЕМ ОТСУТСТВИЕ РАДИАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ЗАДАНЫХ ТЕПЛОВЫХ НАГРУЗКАХ**

*Статическая задача термоупругости в напряжениях для полого шара с зависимыми от радиуса характеристиками материала и постоянными нагрузками на поверхностях сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно радиальной компоненты тензора напряжений. На основании*

полученного интегрального уравнения определена связь между температурой и характеристиками материала, являющаяся условием отсутствия радиального напряжения в шаре. Получены точные аналитические выражения, связывающие коэффициент теплопроводности и температурный коэффициент линейного расширения, а также установлено распределение концентрации одной из составляющих материала в модели простой смеси, приводящее к нулевым радиальным напряжениям в шаре.

**CHARACTERISTICS OF THE MATERIAL OF INHOMOGENEOUS IN THE RADIAL DIRECTION  
HOLLOW SPHERE UNDER THERMAL LOADING WHICH ENSURE ZERO RADIAL STRESSES  
IN IT**

*The steady thermoelasticity problem in terms of stresses in a hollow sphere with dependent on radius material characteristics under constant loading has been reduced to solving the Fredholm integral equation of the second kind relative to the radial stresses. Using the obtained integral equation the relationship between temperature and material characteristics ensuring zero radial stresses has been proposed. The exact analytical expressions connecting thermal conductivity and linear thermal expansion coefficient were obtained and the concentration distribution of the component of the material which ensures the absence of the radial stresses in the sphere was determined using the model of simple mixtures (Voigt model).*

<sup>1</sup>Нац. ун-т “Львівська політехніка”, Львів

<sup>2</sup>Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
25.08.15