

ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ У НАПІВНЕСКІНЧЕННІЙ ПЛАСТИНІ З ДОВІЛЬНО ОРІЄНТОВАНОЮ КРАЙОВОЮ ТРІЩИНОЮ, ЗУМОВЛЕНІ ДЖЕРЕЛОМ ТЕПЛА

Розглянуто термопружний стан напівнескінченної однорідної пластини, що містить довільно орієнтовану крайову прямолінійну тріщину і перебуває під дією внутрішнього стаціонарного джерела тепла. Плоскі задачі теплопровідності і термопружності для вказаної області зведено до сингулярних інтегральних рівнянь, які розв'язано числово методом механічних квадратур. Наведено графіки залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень біля вершини тріщини від кута нахилу тріщини до краю пластини.

Дослідженню температурних полів і термонапружень у півплощині з довільно орієнтованою внутрішньою термоізолюваною, теплопроникною або теплоактивною тріщиною присвячено низку праць [2, 3, 5, 11, 15]. Систему довільно орієнтованих тріщин у півплощині розглянуто у статтях [9, 16, 17]. Вивчено також двовимірні стаціонарні задачі теплопровідності і термопружності для напівнескінченного тіла (пружного півпростору), яке нагрівається тепловим потоком на частині його вільної поверхні і містить довільно орієнтовану крайову тріщину [14], періодичну систему крайових тріщин [6], внутрішню приповерхневу або періодичну систему таких тріщин [4, 13]

Нагрівання матеріалів локально розподіленими джерелами тепла широко використовують в інженерній практиці. У термопружних тілах з дефектами у вигляді тріщин, включень тощо можна спостерігати значні температурні напруження, які часто призводять до руйнування конструкції. Тут досліджено вплив внутрішнього джерела тепла сталої потужності на коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) біля вершини довільно орієнтованого крайового розрізу в однорідній напівнескінченній пластині.

Задача теплопровідності. Розглянемо однорідну ізотропну напівнескінченну пластину, послаблену крайовою тріщиною довжини $2l$, нахиленою під довільним кутом α до краю пластини. Віднесемо пластину до системи координат xOy , а тріщину – до локальної системи координат $x_1O_1y_1$ з віссю O_1x_1 , напрямленою вздовж тріщини і початком у середині тріщини в точці O_1 . На відстані h від краю пластини на осі Oy діє зосереджене джерело тепла сталої потужності $q = \text{const}$ (рис. 1). Бокові поверхні пластини і береги тріщини термоізолювані, на краю пластини задана стала температура $t_0 = \text{const}$. Контакт берегів не враховуємо, і вважаємо, що з віддаленням від краю пластини температура і напруження прямують до нуля. Зв'язок між цими системами координат дають співвідношення

$$z = z_1 e^{-i\omega} + z_1^0, \quad \text{де } z = x + iy, \quad z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_1^0 = l \cdot e^{-i\omega}.$$

Загальну температуру у напівнескінченній пластині з тріщиною подамо у вигляді

$$T(x, y) = T_0(x, y) + T_*(x, y),$$

де $T_0(x, y)$ – розподіл температури в пластині без тріщини, зумовленої заданим джерелом тепла; $T_*(x, y)$ – збурене температурне поле, викликане тріщиною.

Температурне поле $T_0(x, y)$ одержимо із [1] у вигляді

$$T_0(x, y) = A \cdot \ln \frac{x^2 + (y+h)^2}{x^2 + (y-h)^2} + t_0, \quad (1)$$

де $A = -q/4\pi\lambda$, λ – коефіцієнт теплопровідності. Тоді задачу теплопровідності зводимо до визначення збуреної температури $T_*(x, y)$, котра на берегах термоізолюваної тріщини задовольняє умову

$$\frac{\partial T_*^\pm(x, y)}{\partial y_1} = - \frac{\partial T_0(x, y)}{\partial y_1} \Big|_{y_1=0}. \quad (2)$$

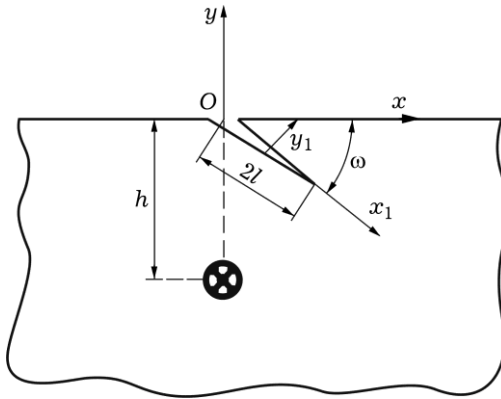


Рис. 1.

Індекси «+» і «-» вказують на крайові значення функції зліва і справа за підходу до контуру тріщини. Похідну $\gamma'(\xi)$ від стрибка температури $T_*(x, y)$ між берегами тріщини знайдемо із розв'язку сингулярного інтегрального рівняння (СІР), яке в параметричній формі з урахуванням (1) і використанням граничної умови (2) має вигляд

$$\int_{-1}^1 L(\xi, \eta) \gamma'(\xi) d\xi = \pi F(\eta), \quad |\eta| < 1, \quad (3)$$

де

$$L(\xi, \eta) = \frac{1}{\xi - \eta} + \frac{(2 + \xi + \eta) \sin^2 \omega - (\xi - \eta) \cos^2 \omega}{(2 + \xi + \eta)^2 \sin^2 \omega - (\xi - \eta)^2 \cos^2 \omega};$$

$$F(\eta) = \sin \omega \frac{\partial T_0(x, y)}{\partial x} \Big|_{y_1=0} - \cos \omega \frac{\partial T_0(x, y)}{\partial y} \Big|_{y_1=0}; \quad \xi = t_1/l; \quad \eta = x_1/l;$$

t_1, x_1 – комплексні координати точок на контурі тріщини в локальній системі координат.

Задача термопружності. Нехай напівнескінченна пластина з крайовою термоізолюваною тріщиною знаходиться під дією стаціонарного температурного поля $T(x, y)$. Край пластини і береги тріщини вільні від зовнішніх навантажень, причому береги під час деформування не контактують. Через лінійність задачі термопружності її розв'язок подамо у вигляді суперпозиції розв'язків трьох таких задач:

1) задачі термопружності для напівнескінченної пластини без тріщини за дії джерела тепла;

2) задачі теорії пружності для пластини з крайовою тріщиною, вважаючи, що до берегів тріщини прикладені зусилля, рівні за значеннями і протилежні за знаком до напружень, знайдених із розв'язку першої задачі, на відрізок розташування тріщини;

3) задачі про визначення термопружного стану, викликаного збуреним температурним полем внаслідок тріщини.

Нижче розглянуто третю задачу, оскільки перша і друга розв'язані раніше [7]. Похідну $g'(\xi)$ від стрибка переміщень (викликаних температур-

ним полем $T_*(x, y)$ на берегах тріщини знайдемо із СІР [6], яке в параметричній формі запишемо у вигляді

$$\int_{-1}^1 [R(\xi, \eta)g'(\xi) + S(\xi, \eta)\overline{g'(\xi)}]d\xi = P(\eta), \quad |\eta| < 1, \quad (4)$$

де

$$R(\xi, \eta) = \frac{1}{\xi - \eta} + \frac{1}{2} \times \left\{ \frac{1}{1 + \eta - (1 + \xi)\exp(2i\omega)} + \frac{(1 + \xi)^2 [\exp(-2i\omega) - \exp(-4i\omega) - \exp(-6i\omega)]}{[1 + \eta - (1 + \xi)\exp(-2i\omega)]^3} + \frac{(1 + \eta)^2 + (1 + \xi)(1 + \eta)[1 - 4\exp(-2i\omega) + \exp(-4i\omega)]}{[1 + \eta - (1 + \xi)\exp(-2i\omega)]^3} \right\};$$

$$S(\xi, \eta) = \frac{1 + \xi}{2} \left\{ \frac{1 - \exp(-2i\omega)}{[1 + \eta - (1 + \xi)\exp(-2i\omega)]^2} + \frac{\exp(2i\omega)[1 - \exp(2i\omega)]}{[1 + \eta - (1 + \xi)\exp(2i\omega)]^2} \right\};$$

$$P(\eta) = \frac{2i\beta_t}{1 + \chi} \int_{-1}^1 [S(\xi, \eta) - R(\xi, \eta)]\gamma(\xi) d\xi; \quad \gamma(\xi) = -\int_{\xi}^1 \gamma'(\xi) d\xi.$$

Тут $\beta^t = \alpha^t \cdot E((1 + \mu))$, $\chi = (3 - \mu)/(1 + \mu)$; α^t , E , μ – температурний коефіцієнт лінійного розширення, модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона відповідно.

Числовий аналіз і висновки. Метод механічних квадратур, що застосовують для числового розв'язання СІР у задачі для тіла з внутрішньою тріщиною, не можна використати безпосередньо в задачі для тіла з крайовим розрізом, оскільки ядра $L(\xi, \eta)$, $R(\xi, \eta)$ і $S(\xi, \eta)$ інтегральних рівнянь (3), (4), крім особливості типу Коші, містять додатково нерухому особливість у точці $\xi = \eta = -1$. У цьому випадку функції $\gamma'(\xi)$, $g'(\xi)$ мають для $\xi = -1$ особливість, відмінну від кореневої. Тому тут вживаємо метод числового розв'язування СІР з нерухомою особливістю, запропонований у праці [8]. Функції $\gamma'(\xi)$, $g'(\xi)$ подамо у формі

$$\gamma'(\xi) = \frac{\gamma_0(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad g'(\xi) = \frac{g_0(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}},$$

де $\gamma_0(\xi)$, $g_0(\xi)$ – неперервні функції. Оскільки функції $\gamma'(\xi)$ і $g'(\xi)$ у точці $\xi = -1$ (що відповідає вершині тріщини $x_1 = -1$, яка виходить на край пластини), мають особливість меншого, ніж $1/\sqrt{1 + \xi}$, порядку, то вважаємо, що

$$\gamma_0(-1) = 0, \quad g_0(-1) = 0. \quad (5)$$

Тоді, застосовуючи квадратурні формули Гауса–Чебишова [12] до СІР (3), (4) та відомі результати [10] до співвідношень (5), отримаємо систему n лінійних алгебричних рівнянь для визначення $\gamma_0(\xi_k)$ ($k = \overline{1, n}$)

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L(\xi_k, \eta_m) \gamma_0(\xi) = F(\eta_m), \quad m = 1, 2, \dots, n-1, \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \gamma_0(\xi_k) \operatorname{tg}\left(\frac{2k-1}{4n} \pi\right) = 0 \quad (7)$$

та систему n лінійних алгебричних рівнянь для визначення $g_0(\xi_k)$ ($k = \overline{1, n}$)

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [R(\xi_k, \eta_m) g_0(\xi_k) + S(\xi_k, \eta_m) \overline{g_0(\xi_k)}] = P(\eta_m), \quad m = 1, 2, \dots, n-1, \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k g_0(\xi_k) \operatorname{tg} \left(\frac{2k-1}{4n} \pi \right) = 0, \quad (9)$$

де
$$P(\eta_m) = \frac{i\beta_t}{1+\chi} \sum_{k=1}^n [S(\xi_k, \eta_m) - R(\xi_k, \eta_m)] \gamma_0(\xi_k),$$

$$\xi_k = \cos \left[(2k-1) \pi / (2n) \right], \quad \eta_m = \cos \frac{\pi m}{n}.$$

Таким чином, розв'язування цієї задачі полягає у визначенні невідомих $\gamma_0(\xi_k)$ зі системи рівнянь (6), (7), з використанням яких знаходимо розв'язок системи рівнянь (8), (9) відносно невідомих $g_0(\xi_k)$. Розрахувавши $g_0(\xi_k)$, обчислимо коефіцієнт інтенсивності дотичних напружень K_{II} у вершині крайової тріщини, зумовлених збуреним температурним полем $T_*(x, y)$:
$$K_{II} = -\sqrt{l} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k g_0(\xi_k) \operatorname{ctg} \left(\frac{2k-1}{4n} \pi \right).$$

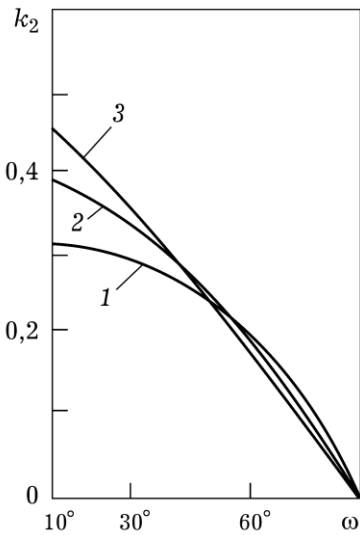


Рис. 2.

На рис. 2 подано залежності безрозмірного КІН $k_2 = K_{II} / K_q$, де $K_q = A \cdot \beta^t \cdot l \sqrt{l} / (1 + \chi)$, від кута нахилу тріщини ω для різних відносних її довжин $l^* = 2l / h$. При цьому відомо [8], що коефіцієнт інтенсивності нормальних напружень $K_I \equiv 0$. Криві 1–3 відповідають $l^* = 0,5; 0,3; 0,1$. Отже, зі зменшенням кута нахилу тріщини до краю півплощини інтенсивність дотичних напружень в околі вершини тріщини зростає для різних її довжин, причому суттєвіше для менших тріщин. Слід зауважити, що максимальні значення цього коефіцієнта становлять 10...15% від максимальних значень КІН K_{II} , зумовлених основним температурним полем $T_0(x, y)$, які одержані раніше [7], а отже, суттєво не впливають на міцність тіла в межах механіки руйнування.

1. Грилицький Д. В., Осів І. М. Задачі теплопровідності й термопружності для пластин. – Львів: Вид-во Львівськ. ун-ту, 1974. – 120 с.
2. Дорош Н. А., Кит Г. С. Термоупругое состояние плоскости и полуплоскости с трещиной под действием источников тепла // Прикл. механика. – 1969. – 5, № 12. – С. 83–88.
3. Дорош Н. А., Кит Г. С. Полуплоскость с теплопроницаемой трещиной под воздействием температурного поля // Вестн. Львовск. политехн. ин-та. – 1976. – № 97. – С. 77–81.
4. Евтушенко А. А., Зеленьак В. М. Тепловая задача трения для полупространства с трещиной // Инж.-физ. журн. – 1999. – 72, №1. – С. 164–169.
5. Кит Г. С., Ивасько Н. М. Плоская деформация полубесконечного тела с перпендикулярной к его границе теплоактивной трещиной // Теорет. и прикл. механика. – 2013. – 53, № 7. – С. 30–37.

6. Конечны С., Евтушенко А., Зеленьяк В. Фрикционный нагрев полупространства с краевыми трещинами // Трение и износ. – 2001. – **22**, № 1. – С. 39–45.
7. Матysiак С. Я., Евтушенко А. А., Зеленьяк В. М. Термоупругое состояние полубесконечной пластинки с краевой трещиной, обусловленное источником тепла // Инж.-физ. журн. – 2003. – **76**, № 2. – С. 134–137.
8. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
9. Панасюк В. В., Саврук М. П., Солтыс И. Ф. Температурные поля в упругой полуплоскости с произвольно размещенными термоизолированными трещинами // Физ.-хим. механика материалов. – 1975. – **11**, № 4. – С. 48–54.
10. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
11. Саврук М. П., Солтыс И. Ф. Термоупругое состояние полуплоскости с термоизолированной трещиной // Физ.-хим. механика материалов. – 1985. – **21**, № 6. – С. 89–90.
12. Chawla M. M., Ramakrishnan T. R. Modified Gauss-Jacoby quadrature formulas for the numerical evaluation of Cauchy type singular integrals // BIT (Sver.). – 1974. – **14**, № 1. – P. 14–21.
13. Matysiak S. J., Yevtushenko A. A., Zelenjak V. M. Frictional heating of a half-space with cracks. I. Single or periodic system of subsurface cracks // Tribol. Int. – 1999. – **32**, № 5. – P. 237–243.
14. Matysiak S., Yevtushenko A., Zelenjak V. Frictional heating of a half-space with an edge crack // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 2. – С. 127–134.
15. Sekine H. Crack problem for a semi-infinite solid with heated bounding surface // Trans. ASME. – 1977. – **44**, № 4. – P. 657–642.
16. Sekine H. Thermal stresses near tips of an in insulated line crack in a semi-infinite medium under uniform heat flow // Eng. Fract. Mech. – 1977. – **9**, № 2. – P. 499–507.
17. Tweed J., Lowe B. The thermoelastic problem for a half-plane with an internal line crack // Int. J. Eng. Sci. – 1979. – **17**, № 4. – P. 357–363.

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ С ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННОЙ КРАЕВОЙ ТРЕЩИНОЙ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

Рассмотрено термоупругое состояние полубесконечной однородной пластинки, которая содержит произвольно ориентированную краевую прямолинейную трещину и находится под действием внутреннего стационарного источника тепла. Плоские задачи теплопроводности и термоупругости для указанной области решены методом сингулярных интегральных уравнений. Численные результаты получены методом механических квадратур и приведены в виде графиков для коэффициентов интенсивности напряжений у вершины трещины в зависимости от угла наклона трещины к краю пластинки.

THERMAL STRESSES IN SEMI-INFINITE PLATE WITH ARBITRARILY ORIENTED EDGE CRACK DUE TO HEAT SOURCE

A thermoelastic state of semi-infinite homogeneous plate, which contains arbitrarily oriented edge crack and is under the influence of an internal stationary source of heat is considered. Plane problems of heat conduction and thermoelasticity for the specified area are solved by singular integral equations. Numerical results are obtained by mechanical quadrature method and shown as curves for the stress intensity factors at the crack tip, depending on the angle of inclination of the cracks to the edge of the plate.