

## ВИЗНАЧЕННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ КУСКОВО-НЕОДНОРІДНОГО ТЕРМОЧУТЛИВОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА

*Викладено методикку визначення термопружного стану, зумовленого плоским осесиметричним температурним полем та поверхневими навантаженнями, у шаруватому ізотропному циліндрі з урахуванням залежності від температури і координати фізико-механічних характеристик (ФМХ). Методика передбачає отримання з інтегрального подання розв'язку відповідної задачі для звичайного диференціального рівняння з узагальненими похідними систем інтегро-алгебричних рівнянь відносно радіальних переміщень та їх розв'язання запропонованим способом. При цьому використано функції Гріна задачі пружності для шаруватих циліндрів зі сталими ФМХ складових. Числові дослідження виконано для циліндра з функціонально-градієнтного матеріалу.*

У працях [2, 3] визначення термопружного стану кусково-неоднорідних термочутливих циліндричних тіл, що перебувають під дією одновимірного температурного поля та поверхневих навантажень, зведено за допомогою функції Гріна задачі пружності для однорідного циліндра до розв'язання систем інтегро-алгебричних рівнянь відносно радіальних напружень за однакових сталей та радіальних переміщень за різних коефіцієнтів Пуассона складових циліндра. Для відшукування розв'язків цих систем використано метод послідовних наближень. При цьому за нульові наближення взято праві частини відповідних рівнянь. Виявилось, що чим істотніша відмінність між коефіцієнтами Пуассона, то більше необхідно наближень для досягнення заданої точності. Розвиваючи відомі підходи [2, 3], розробили методику визначення термопружного стану кусково-неоднорідного термочутливого порожнистого циліндра для широкого діапазону зміни його ФМХ та товщини. Вона передбачає отримання систем інтегро-алгебричних рівнянь відносно радіальних переміщень за допомогою функції Гріна задачі пружності для шаруватого циліндра зі сталими ФМХ складових, причому їх кількість може бути більша, ніж у досліджуваному циліндрі, та знаходження із цих рівнянь методом послідовних наближень переміщень, що відповідають першому наближенню. При цьому за нульові наближення взято відповідні вирази для переміщень, які отримують з інтегро-алгебричних рівнянь за тих самих сталей модулів пружності і коефіцієнтів Пуассона складових, що й у співвідношеннях для функції Гріна.

**Формулювання задачі термопружності.** Розглянемо пружне тіло, складене із ідеально контактуючих концентрично розташованих кругових порожнистих ізотропних циліндрів з різними ФМХ. Вважаємо, що обмежувальні циліндричні поверхні тіла перебувають під дією рівномірно прикладених навантажень  $\sigma_0$ ,  $\sigma_n$  відповідно, торцеві – під дією навантажень, рівнодійна яких дорівнює  $P$ , а саме тіло – в температурному полі, яке описує функція

$$t(r) = t_1(r) + \sum_{i=1}^{n-1} [t_{i+1}(r) - t_i(r)] S(r - r_i), \quad (1)$$

де  $t_p(r)$ , ( $p = \overline{1, n}$ ) – відомі розподіли температур при  $r_{p-1} < r < r_p$ ;  $r, r_0$  і  $r_p$  – віднесені до характерного лінійного розміру  $l$  відповідно радіальна координата, внутрішній радіус першого і зовнішній радіус  $p$ -го шарів;  $n$  – кількість шарів;  $S(\zeta)$  – функція Гевісайда.

Для визначення термопружного стану тіла за припущення, що ФМХ залежать від температури і координати, використаємо рівняння рівноваги

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \quad (2)$$

та співвідношення

$$\begin{aligned} \sigma_r &= c(r) \frac{du}{dr} + \lambda(r) \left( \frac{u}{r} + \varepsilon_z \right) - c^*(r) \Phi(r), \\ \sigma_\varphi &= \lambda(r) \left( \frac{du}{dr} + \varepsilon_z \right) + c(r) \frac{u}{r} - c^*(r) \Phi(r), \\ \sigma_z &= c(r) \varepsilon_z + \lambda(r) \left( \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right) - c^*(r) \Phi(r), \end{aligned} \quad (3)$$

де віднесене до  $l$  радіальне переміщення  $u(r)$  задовольняє рівняння з узагальненими похідними

$$\frac{d}{dr} \left[ c(r) \frac{du}{dr} \right] + \frac{d}{dr} \left[ \lambda(r) \frac{u}{r} \right] + 2\mu(r) \frac{d}{dr} \left( \frac{u}{r} \right) = \frac{d}{dr} [c^*(r) \Phi(r)] - \varepsilon_z \frac{d\lambda(r)}{dr} \quad (4)$$

і граничні умови

$$\sigma_r|_{r=r_0} = -\sigma_0, \quad \sigma_r|_{r=r_n} = -\sigma_n. \quad (5)$$

Тут функції  $c(r) = \lambda(r) + 2\mu(r)$ ,  $\lambda(r) = \frac{E(t, r)v(t, r)}{[1 + v(t, r)][1 - 2v(t, r)]}$ ,  $\mu(r) = \frac{E(t, r)}{2[1 + v(t, r)]}$ ,

$c^*(r) = \frac{E(t, r)}{1 - 2v(t, r)}$  мають вигляд (1); функції  $E(t, r)$ ,  $v(t, r)$  і  $\Phi(r)$  у межах  $p$ -го шару збігаються відповідно з модулями пружності  $E_p(t_p, r)$ , коефіцієнтами Пуассона  $\nu_p(t_p, r)$  і  $\Phi_p(r) = \int_0^{t_p(r)} \alpha_{tp}(\zeta, r) d\zeta$ ;  $\alpha_{tp}(t_p, r)$  – температурні

коефіцієнти лінійного розширення  $p$ -го шару;  $\varepsilon_z = \text{const}$  – осьова деформація (поки що невідома).

**Інтегральне подання розв'язку.** Перейдемо від диференціального формулювання задачі визначення переміщень до її формулювання в інтегральній формі за допомогою функції Гріна  $G(r, \rho)$ , яка є розв'язком задачі

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ c_0(r) \frac{\partial G}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \lambda_0(r) \frac{G}{r} \right] + 2\mu_0(r) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{G}{r} \right) = -\frac{1}{\rho} \delta(r - \rho), \quad (6)$$

$$\tau_r|_{r=r_0} = \tau_r|_{r=r_n} = 0. \quad (7)$$

Тут функції  $c_0(r) = \lambda_0(r) + 2\mu_0(r)$ ,  $\lambda_0(r) = \frac{E_0(r)v_0(r)}{[1 + v_0(r)][1 - 2v_0(r)]}$ ,

$\mu_0(r) = \frac{E_0(r)}{2[1 + v_0(r)]}$  мають вигляд (1); функції  $E_0(r)$ ,  $v_0(r)$  в межах  $p$ -го шару збігаються відповідно з модулями пружності  $E_{0p}$ , коефіцієнтами Пуас-

сона  $\nu_{0p}$ ;  $E_{0p}$ ,  $\nu_{0p}$  – значення з інтервалу зміни функцій  $E_p(t, r)$ ,  $\nu_p(t, r)$

відповідно;  $\tau_r = \frac{\partial G(r, \rho)}{\partial r} + \nu_0^*(r) \frac{G(r, \rho)}{r}$ ,  $\nu_0^*(r) = \frac{\nu_0(r)}{1 - \nu_0(r)}$ ;  $\delta(\zeta)$  – дельта-функ-

ція Дірака.

Зауважимо, що рівняння (6), використовуючи правило диференціювання добутку двох кусково-неперервних функцій

$$[\varphi(x)\psi(x)]' = \varphi'(x)\psi(x) + \varphi(x)\psi'(x) \quad (8)$$

і операції некомутативного та асоціативного множення

$$f(x)\delta(x - a) = f(a + 0)\delta(x - a), \quad \delta(x - a)f(x) = f(a - 0)\delta(x - a), \quad (9)$$

можна подати також у вигляді

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} - \frac{G}{r^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \left( (1 - K_{0c}^{(i+1)}) \frac{\partial G}{\partial r} + K_{\lambda i}^{(0)} \frac{G}{r} \right) \Big|_{r=r_i-0} \delta(r - r_i) = -\frac{\delta(r - \rho)}{\rho c_0(\rho)}, \quad (10)$$

де  $K_{0c}^{(i+1)} = \frac{c_{0i}}{c_{0i+1}}$ ;  $K_{\lambda i}^{(0)} = \frac{\lambda_{0i+1} - \lambda_{0i}}{c_{0i+1}}$ .

Домножимо (4) зліва на  $rG(r, \rho)$  і перетворимо отримане рівняння з урахуванням співвідношень типу

$$g(r) \frac{d}{dr} \left[ f(r) \frac{du(r)}{dr} \right] = \frac{d}{dr} \left[ g(r) f(r) \frac{du(r)}{dr} \right] - \frac{d}{dr} \left[ \frac{dg(r)}{dr} f(r) u(r) \right] + \frac{d}{dr} \left[ \frac{dg(r)}{dr} f(r) \right],$$

$$g(r) \frac{df(r)}{dr} = \frac{d}{dr} [g(r) f(r)] - \frac{dg(r)}{dr} f(r) \quad (11)$$

до вигляду

$$\frac{\partial}{\partial r} [rG(r, \rho) \sigma_r(r)] - \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial r} [rG(r, \rho)] c(r) - 2G(r, \rho) \mu(r) \right] u(r) \right\} +$$

$$+ \left\{ r \left[ \frac{\partial^2 G(r, \rho)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G(r, \rho)}{\partial r} - \frac{G(r, \rho)}{r^2} \right] c(r) + \frac{\partial}{\partial r} [rG(r, \rho)] \frac{dc(r)}{dr} - 2G(r, \rho) \frac{d\mu(r)}{dr} \right\} u(r) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial r} [rG(r, \rho)] c^*(r) \Phi(r) + \varepsilon_z \frac{\partial}{\partial r} [rG(r, \rho)] \lambda(r). \quad (12)$$

З (12) після диференціювання в узагальненому сенсі [1] функцій  $c(r)$  і  $\mu(r)$ , використання формул (9) і (10) та інтегрування по  $r$  у межах від  $r_0$  до  $r_n$  одержимо:

$$\frac{c(\rho)}{c_0(\rho)} u(\rho) = \left\{ rG(r, \rho) \sigma_r(r) - \left[ \frac{\partial}{\partial r} [rG(r, \rho)] c(r) - 2\mu(r) G(r, \rho) \right] u(r) \right\} \Big|_{r=r_0}^{r=r_n} +$$

$$+ \int_{r_0}^{r_n} \frac{\partial}{\partial r} [rG(r, \rho)] c^*(r) \Phi(r) dr + \int_{r_0}^{r_n} \left[ \frac{\partial}{\partial r} [rG(r, \rho)] \left( \frac{dc(r)}{dr} \right)_{\kappa\lambda} - 2G(r, \rho) \left( \frac{d\mu(r)}{dr} \right)_{\kappa\lambda} \right] u(r) dr -$$

$$- \varepsilon_z \int_{r_0}^{r_n} \frac{\partial}{\partial r} [rG(r, \rho)] \lambda(r) dr + \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ K_{ci} \frac{\partial}{\partial r} [rG(r, \rho)] \Big|_{r=r_i+0} - 2K_{\mu i} G(r_i, \rho) - \right.$$

$$\left. - \left[ (1 - K_{0c}^{(i+1)}) r_i \frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r=r_i-0} + K_{\lambda i}^{(0)} G(r_i, \rho) \right] c(r_i - 0) \right\} u(r_i - 0), \quad r_0 < \rho < r_n, \quad (13)$$

де  $K_{ci} = c_{i+1}(r_i) - c_i(r_i)$ ;  $K_{\mu i} = \mu_{i+1}(r_i) - \mu_i(r_i)$ ; індекс « $\kappa\lambda$ » означає, що відповідна похідна класична.

**Система інтегро-алгебричних рівнянь.** Замінімо в (13) інтегралі по товщині циліндра сумою інтегралів по товщині шарів і розглянемо отримане співвідношення в межах  $p$ -го шару. При цьому беремо до уваги, що при  $r_{p-1} < \rho < r_p$ ,  $r_{j-1} < r < r_j$   $G(r, \rho)$  збігається з елементами матриці Гріна [4]:

$$G_{jp}(r, \rho) = \frac{1}{4Q} \begin{cases} \varphi_{1j}(r) \varphi_{2p}(\rho) / c_{0p}, & j < p \\ \varphi_{1p}(\rho) \varphi_{2j}(r) / c_{0j}, & j > p \end{cases}, \quad (14)$$

$$G_{jj}(r, \rho) = \frac{1}{2c_{0j}} \left[ \frac{rS(\rho - r)}{\rho} + \frac{\rho S(r - \rho)}{r} \right] + \frac{1}{4c_{0j}Q} \left[ r_{j-1} M_{1j}^- \frac{\varphi_{2j}(\rho)}{r} - \frac{M_{2j}^-}{r_j} r \varphi_{1j}(\rho) \right], \quad (15)$$

де

$$M_{11}^\pm = 2(1 \mp v_{01}^*), \quad M_{1i}^\pm = \Phi_{i-1}^{(0)}(r_{i-1})(1 \pm K_v^{(i)}) \pm \Phi_{i-1}^{(1)}(r_{i-1}) K_c^{(i)}, \quad i = \overline{2, n};$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{1i}(x) &= M_{1i}^+ x + M_{1i}^- r_{i-1}^2/x, \quad \varphi_{2i}(x) = M_{2i}^+ /x - M_{2i}^- x/r_i^2, \\
M_{2i}^\pm &= \kappa_{ni}^{(2)} + v_{0n}^* \kappa_{ni}^{(1)} \pm (\kappa_{ni}^{(4)} + v_{0n}^* \kappa_{ni}^{(3)}), \quad i = \overline{1, n}; \\
\Phi_1^{(m)}(r) &= 1 - v_{01}^* + (-1)^m (1 + v_{01}^*) \left( \frac{r_0}{r} \right)^2; \\
\Phi_i^{(m)}(r) &= \Phi_{i-1}^{(0)}(r_{i-1}) f_{i1}^{(m)}(r) + \Phi_{i-1}^{(1)}(r_{i-1}) f_{i2}^{(m)}(r), \\
f_{i1}^{(m)}(r) &= \frac{1}{2} \left[ 1 + K_v^{(i)} + (-1)^m (1 - K_v^{(i)}) \left( \frac{r_{i-1}}{r} \right)^2 \right], \quad K_v^{(i)} = K_{0c}^{(i)} v_{0, i-1}^* - v_{0i}^*, \\
f_{i2}^{(m)}(r) &= \frac{1}{2} K_{0c}^{(i)} \left[ 1 - (-1)^m \left( \frac{r_{i-1}}{r} \right)^2 \right], \quad i = \overline{2, n}, \quad m = 0, 1; \quad \mathcal{Q} = \Phi_n^{(1)}(r_n) + v_{0n}^* \Phi_n^{(0)}(r_n); \\
\kappa_{i+1, i}^{(1)} &= f_{i+1, 1}^{(0)}(r_{i+1}), \quad \kappa_{i+1, i}^{(2)} = f_{i+1, 1}^{(1)}(r_{i+1}), \quad \kappa_{i+1, i}^{(3)} = f_{i+1, 2}^{(0)}(r_{i+1}), \quad \kappa_{i+1, i}^{(4)} = f_{i+1, 2}^{(1)}(r_{i+1}), \\
\kappa_{i+j, i}^{(1)} &= f_{i+j, 1}^{(0)}(r_{i+j}) \kappa_{i+j-1, i}^{(1)} + f_{i+j, 2}^{(0)}(r_{i+j}) \kappa_{i+j-1, i}^{(2)}, \\
\kappa_{i+j, i}^{(2)} &= f_{i+j, 1}^{(1)}(r_{i+j}) \kappa_{i+j-1, i}^{(1)} + f_{i+j, 2}^{(1)}(r_{i+j}) \kappa_{i+j-1, i}^{(2)}, \\
\kappa_{i+j, i}^{(3)} &= f_{i+j, 1}^{(0)}(r_{i+j}) \kappa_{i+j-1, i}^{(3)} + f_{i+j, 2}^{(0)}(r_{i+j}) \kappa_{i+j-1, i}^{(4)}, \\
\kappa_{i+j, i}^{(4)} &= f_{i+j, 1}^{(1)}(r_{i+j}) \kappa_{i+j-1, i}^{(3)} + f_{i+j, 2}^{(1)}(r_{i+j}) \kappa_{i+j-1, i}^{(4)}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{2, n-i}, \\
\kappa_{nn}^{(1)} &= \kappa_{nn}^{(4)} = 1, \quad \kappa_{nn}^{(2)} = \kappa_{nn}^{(3)} = 0.
\end{aligned}$$

Зробивши відповідні перетворення з урахуванням граничних умов (5), одержимо таку систему інтегро-алгебричних рівнянь відносно переміщень  $u_p(\rho)$ :

$$\begin{aligned}
c_p(\rho) u_p(\rho) &= u_{tp}(\rho) + u_{yp}(\rho) - \varepsilon_z u_{\varepsilon p}(\rho) + \frac{1}{2\mathcal{Q}} \left[ \frac{\gamma_n c_{0p}}{r_n c_{0n}} u_n(r_n) \varphi_{1p}(\rho) - 2\gamma_1 r_0 u_1(r_0) \varphi_{2p}(\rho) \right] + \\
&+ \frac{1}{\rho} V_{ap}(\rho) - \rho V_{bp}(\rho) + \frac{1}{2\mathcal{Q}} \left[ H_{1p} \varphi_{2p}(\rho) - H_{2p} \varphi_{1p}(\rho) \right] + \sum_{i=1}^{n-1} g_{up}^{(i)}(\rho) u_i(r_i), \quad (16)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
u_{sp}(\rho) &= \frac{1}{\rho} V_{sp}(\rho) + \frac{1}{2\mathcal{Q}} [R_{1p}^s \varphi_{2p}(\rho) - R_{2p}^s \varphi_{1p}(\rho)], \quad s = t, y, \varepsilon, \\
V_{sp}(\rho) &= \int_{r_{p-1}}^{\rho} r \Lambda_{sp}(r) dr; \quad \Lambda_{tp}(r) = c_p^*(r) \Phi_p(r), \quad \Lambda_{\varepsilon p}(r) = \lambda_p(r), \quad \Lambda_{yp}(r) = 0; \\
R_{1p}^s &= \sum_{j=1}^{p-1} M_{1j}^+ V_{sj}(r_j), \quad R_{2p}^s = \sum_{j=p}^n \frac{c_{0p}}{r_j^2 c_{0j}} M_{2j}^- V_{sj}(r_j), \quad s = t, \varepsilon, \\
R_{1p}^y &= 2r_0^2 \sigma_0, \quad R_{2p}^y = \sigma_n c_{0p} / c_{0n}; \\
\gamma_1 &= 2\mu_1(r_0) - k_{01} c_1(r_0), \quad \gamma_n = 2\mu_n(r_n) - k_{0n} c_n(r_n), \quad k_{0j} = \frac{1 - 2v_{0j}}{1 - v_{0j}}; \\
H_{1p} &= \sum_{j=1}^{p-1} M_{1j}^+ V_{aj}(r_j) - \sum_{j=1}^p r_{j-1}^2 M_{1j}^- V_{bj}(r_{j-1}), \\
H_{2p} &= \sum_{j=p+1}^n \frac{c_{0p}}{c_{0j}} M_{2j}^+ V_{bj}(r_{j-1}) + \sum_{j=p}^n \frac{c_{0p}}{r_j^2 c_{0j}} M_{2j}^- V_{aj}(r_j); \\
V_{ap}(\rho) &= \int_{r_{p-1}}^{\rho} r y_{1p}(r) u_p(r) dr, \quad V_{bp}(\rho) = \int_{\rho}^{r_p} \frac{1}{r} y_{2p}(r) u_p(r) dr;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_{1p}(r) &= \frac{d\mu_p^*(r)}{dr}, \quad y_{2p}(r) = \frac{d\mu_p(r)}{dr}, \quad \mu_p^*(r) = \frac{\mu_p(r)}{1 - 2\nu_p(t_p, r)}, \\
 4Qg_{up}^{(i)}(\rho) &= 2K_{ci}r_i g_{up}^{(2i)}(\rho) - g_{up}^{(1i)}(\rho), \\
 g_{up}^{(1i)}(\rho) &= \begin{cases} b_{2i}\Phi_{1p}(\rho)c_{0p}/c_{0i}, p \leq i \\ b_{1i}\Phi_{2p}(\rho), p > i \end{cases}, \quad g_{up}^{(2i)}(\rho) = \begin{cases} b_{3i}\Phi_{1p}(\rho)c_{0p}/c_{0,i+1}, p < i+1 \\ M_{1,i+1}^+\Phi_{2p}(\rho), p \geq i+1 \end{cases}, \\
 b_{1i} &= r_i[m_{0i}m_{1i}^+ + (1 - K_{0c}^{(i+1)})c_i(r_i)m_{1i}^-], \quad m_{0i} = 2K_{\mu i} + K_{\lambda i}^{(0)}c_i(r_i), \\
 m_{1i}^\pm &= M_{1i}^+ \pm M_{1i}^- \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^2, \\
 b_{2i} &= \frac{1}{r_i}[m_{0i}m_{2i}^- + (1 - K_{0c}^{(i+1)})c_i(r_i)m_{2i}^+], \quad m_{2i}^\pm = -(M_{2i}^- \pm M_{2i}^+), \quad b_{3i} = -r_{i+1}^{-2}M_{2,i+1}^-,
 \end{aligned}$$

З огляду на структуру рівнянь (16) їх розв'язок шукаємо у вигляді суми

$$u_p(\rho) = u_p^t(\rho) + u_p^y(\rho) - \varepsilon_z u_p^\varepsilon(\rho), \quad (17)$$

де (з урахуванням змінності ФМХ) перший доданок описує переміщення, зумовлені температурним полем, другий – поверхневими навантаженнями  $\sigma_0$ ,  $\sigma_n$  у циліндрі з закріпленими торцями. Підставивши (17) в (16), одержимо для знаходження функцій  $u_p^s(\rho)$  ( $s = t, y, \varepsilon$ ) відповідні системи рівнянь:

$$c_p(\rho)u_p^s(\rho) - \frac{L_{1p}^s\Phi_{1p}(\rho) - L_{2p}^s\Phi_{2p}(\rho)}{2Q} - \frac{1}{\rho}V_{ap}^{(s)}(\rho) + \rho V_{bp}^{(s)}(\rho) - \sum_{i=1}^{n-1} g_{up}^{(i)}(\rho)u_i^s(r_i) = u_{0p}^s(\rho), \quad (18)$$

де

$$\begin{aligned}
 L_{1p}^s &= \frac{\gamma_n c_{0p}}{r_n c_{0n}} u_n^s(r_n) - H_{2p}^s, \quad L_{2p}^s = 2\gamma_1 r_0 u_1^s(r_0) - H_{1p}^s, \\
 H_{1p}^s &= \sum_{j=1}^{p-1} M_{1j}^+ V_{aj}^s(r_j) - \sum_{j=1}^p r_{j-1}^2 M_{1j}^- V_{bj}^s(r_{j-1}), \\
 H_{2p}^s &= \sum_{j=p+1}^n \frac{c_{0p}}{c_{0j}} M_{2j}^+ V_{bj}^s(r_{j-1}) + \sum_{j=p}^n \frac{c_{0p}}{r_j^2 c_{0j}} M_{2j}^- V_{aj}^s(r_j), \\
 V_{ap}^s(\rho) &= \int_{r_{p-1}}^{\rho} r y_{1p}(r) u_p^s(r) dr, \quad V_{bp}^s(\rho) = \int_{\rho}^{r_p} \frac{1}{r} y_{2p}(r) u_p^s(r) dr, \\
 u_{0p}^t(\rho) &= u_{tp}(\rho), \quad u_{0p}^y(\rho) = u_{yp}(\rho), \quad u_{0p}^\varepsilon(\rho) = u_{\varepsilon p}(\rho).
 \end{aligned}$$

**Співвідношення для деформацій і напружень.** Продиференціювавши (16), вважаючи при цьому, що розв'язок рівнянь (18) знайдено, дістанемо з урахуванням (17) вирази для радіальних деформацій:

$$c_p(\rho) \frac{du_p(\rho)}{dr} = \varepsilon_{rp}^t(\rho) + \varepsilon_{rp}^y(\rho) - \varepsilon_z \varepsilon_{rp}^\varepsilon(\rho), \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rp}^s(\rho) &= e_p^s(\rho) + \frac{L_{1p}^s\Phi_{3p}(\rho) - L_{2p}^s\Phi_{4p}(\rho)}{2Q} - \frac{1}{\rho^2}V_{ap}^s(\rho) - V_{bp}^s(\rho) + \sum_{i=1}^{n-1} g_{\varepsilon p}^{(i)}(\rho)u_i^s(r_i); \\
 e_p^s(\rho) &= \Lambda_{sp}(\rho) - \frac{1}{\rho^2}V_{sp}(\rho) + \frac{1}{2Q}[R_{1p}^s\Phi_{4p}(\rho) - R_{2p}^s\Phi_{3p}(\rho)], \\
 \Phi_{3p}(\rho) &= M_{1p}^+ - M_{1p}^- r_{p-1}^2/\rho^2, \quad \Phi_{4p}(\rho) = -M_{2p}^+/\rho^2 - M_{2p}^-/r_p^2; \\
 4Qg_{\varepsilon p}^{(i)}(\rho) &= 2K_{ci}r_i g_{\varepsilon p}^{(2i)}(\rho) - g_{\varepsilon p}^{(1i)}(\rho),
 \end{aligned}$$

$$g_{\varepsilon p}^{(1i)}(\rho) = \begin{cases} b_{2i}\Phi_{3p}(\rho)c_{0p}/c_{0i}, p \leq i \\ b_{1i}\Phi_{4p}(\rho), p > i \end{cases}, \quad g_{\varepsilon p}^{(2i)}(\rho) = \begin{cases} b_{3i}\Phi_{3p}(\rho)c_{0p}/c_{0,i+1}, p < i+1 \\ M_{1,i+1}^+\Phi_{4p}(\rho), p \geq i+1 \end{cases}.$$

Підставляючи (16), (19) в отримані на основі (3) залежності для  $p$ -го шару, матимемо співвідношення для напружень.

$$\begin{aligned} & \text{Осьову деформацію визначаємо з умови } \int_{r_0}^{r_n} \rho \sigma_z(\rho) d\rho \equiv \\ & \equiv \sum_{p=1}^n \int_{r_{p-1}}^{r_p} \rho \sigma_{zp}(\rho) d\rho = P/2\pi. \text{ З урахуванням (17) знаходимо:} \\ & \varepsilon_z = \frac{P/(2\pi) + \sum_{p=1}^n \eta_{tp} + 2 \sum_{p=1}^n (\eta_{bp}^t + \eta_{bp}^y) - \sum_{p=1}^n (A_p^t + A_p^y) \eta_{vp}}{\sum_{p=1}^n \eta_p + 2 \sum_{p=1}^n \eta_{bp}^\varepsilon - \sum_{p=1}^n A_p^\varepsilon \eta_{vp}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Тут

$$\begin{aligned} A_p^s &= \frac{M_{1p}^+}{Q} (L_{1p}^s - R_{2p}^s) + \frac{M_{2p}^-}{r_p^2 Q} (L_{2p}^s - R_{1p}^s) + \sum_{i=1}^{n-1} g_{zp}^{(i)} u_i^s(r_i), \quad g_{zp}^{(i)} = \frac{2K_{ci} r_i g_{zp}^{(2i)} - g_{zp}^{(1i)}}{2Q}, \\ g_{zp}^{(1i)}(\rho) &= \begin{cases} b_{2i} M_{1p}^+ c_{0p}/c_{0i}, p \leq i \\ -b_{1i} M_{2p}^- / r_p^2, p > i \end{cases}, \quad g_{zp}^{(2i)}(\rho) = \begin{cases} b_{3i} M_{1p}^+ c_{0p}/c_{0,i+1}, p < i+1 \\ -M_{1,i+1}^+ M_{2p}^- / r_p^2, p \geq i+1 \end{cases}, \\ \eta_{tp} &= \int_{r_{p-1}}^{r_p} \rho k_p(\rho) \Phi_p(\rho) d\rho, \quad \eta_{bp}^s = \int_{r_{p-1}}^{r_p} v_p^*(\rho) V_{bp}^s(\rho) d\rho, \quad \eta_{vp} = \int_{r_{p-1}}^{r_p} \rho v_p^*(\rho) d\rho, \\ \eta_p &= \int_{r_{p-1}}^{r_p} \rho k_p^*(\rho) d\rho, \quad v_p^*(\rho) = \frac{v_p(t_p, \rho)}{1 - v_p(t_p, \rho)}, \quad k_p(\rho) = \frac{E_p(t_p, \rho)}{1 - v_p(t_p, \rho)}, \quad k_p^*(\rho) = \frac{E_p(t_p, \rho)}{1 - v_p^2(t_p, \rho)}. \end{aligned}$$

**Визначення переміщень.** Для цього скористаємось методом послідовних наближень, взявши за нульові наближення переміщення  $u_p^{*s}(\rho)$ , що отримують з (18), коли модулі пружності та коефіцієнти Пуассона сталі і такі ж, як у задачі (6), (7):

$$u_p^{*s}(\rho) = \frac{1}{\rho} V_{sp}^*(\rho) + \frac{1}{2Q} [R_{1p}^{*s} \Phi_{2p}(\rho) - R_{2p}^* \Phi_{1p}(\rho)], \quad s = t, y, \varepsilon, \quad (21)$$

де

$$R_{1p}^{*s} = \sum_{j=1}^{p-1} M_{1j}^+ V_{sj}^*(r_j) \frac{c_{0j}}{c_{0p}}, \quad R_{2p}^{*s} = \sum_{j=p}^n \frac{M_{2j}^- V_{sj}^*(r_j)}{r_j^2}, \quad s = t, \varepsilon; \quad R_{1p}^{*y} = \frac{2r_0^2 \sigma_0}{c_{0p}}, \quad R_{2p}^{*y} = \frac{\sigma_n}{c_{0n}};$$

$$V_{sp}^*(\rho) = \int_{r_{p-1}}^{\rho} r \Lambda_{sp}^*(r) dr; \quad \Lambda_{tp}^*(r) = k_{0p}^* \Phi_p(r), \quad \Lambda_{\varepsilon p}^*(r) = v_{0p}^*, \quad \Lambda_{yp}^*(r) = 0. \quad k_{0p}^* = \frac{1 + v_{0p}}{1 - v_{0p}}.$$

Тоді переміщення, що відповідають першому наближенню, будуть:

$$c_p(\rho) u_p^s(\rho) = u_{0p}^s(\rho) + \frac{L_{1p}^s \Phi_{1p}(\rho) - L_{2p}^s \Phi_{2p}(\rho)}{2Q} + \frac{V_{ap}^{(s)}(\rho)}{\rho} - \rho V_{bp}^{(s)}(\rho) + \sum_{i=1}^{n-1} g_{up}^{(i)}(\rho) u_i^s(r_i), \quad (22)$$

де

$$\begin{aligned} V_{ap}^s(\rho) &= \mu_p^*(\rho) \rho u_p^{*s}(\rho) - \mu_p^*(r_{p-1}) r_{p-1} u_p^{*s}(r_{p-1}) + V_{ap}^{*s}(\rho), \\ V_{bp}^s(\rho) &= \mu_p(r_p) u_p^{*s}(r_p) \frac{1}{r_p} - \mu_p(\rho) u_p^{*s}(\rho) \frac{1}{\rho} + V_{bp}^{*s}(\rho); \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
 V_{ap}^{*t}(\rho) &= \frac{M_{2p}^- R_{1p}^* + r_p^2 M_{1p}^+ R_{2p}^*}{r_p^2 Q} b_p^*(\rho) - k_p^* \int_{r_{p-1}}^{\rho} r \mu_p^*(r) \Phi_p(r) dr, \\
 V_{bp}^{*t}(\rho) &= \frac{M_{2p}^+ R_{1p}^{*t} - M_{1p}^- r_{p-1}^2 R_{2p}^{*t}}{Q} b_p(\rho) + k_p^* \left[ 2 \int_{\rho}^{r_p} \frac{\mu_p(r) V_{tp}^*(r)}{r^3} dr - \int_{\rho}^{r_p} \frac{\mu_p(r) \Phi_p(r)}{r} dr \right], \\
 V_{ap}^{*\varepsilon}(\rho) &= \left[ \frac{M_{2p}^- R_{1p}^{*\varepsilon} + r_p^2 M_{1p}^+ R_{2p}^{*\varepsilon}}{r_p^2 Q} - v_{0p}^* \right] b_p^*(\rho), \quad b_p^*(\rho) = \int_{r_{p-1}}^{\rho} r \mu_p^*(r) dr, \\
 V_{bp}^{*\varepsilon}(\rho) &= \left[ \frac{M_{2p}^+ R_{1p}^{*\varepsilon} - M_{1p}^- r_{p-1}^2 R_{2p}^{*\varepsilon}}{Q} - r_{p-1}^2 v_{0p}^* \right] b_p(\rho), \quad b_p(\rho) = \int_{\rho}^{r_p} \frac{\mu_p(r)}{r^3} dr, \\
 V_{ap}^{*y}(\rho) &= \frac{M_{2p}^- R_{1p}^{*y} + r_p^2 M_{1p}^+ R_{2p}^{*y}}{r_p^2 Q} b_p^*(\rho), \quad V_{bp}^{*y}(\rho) = \frac{M_{2p}^+ R_{1p}^{*y} - M_{1p}^- r_{p-1}^2 R_{2p}^{*y}}{Q} b_p(\rho),
 \end{aligned}$$

$L_{1p}^s = \frac{\gamma_n c_{0p}}{r_n c_{0n}} u_n^s(r_n) - H_{2p}^s$ ,  $L_{2p}^s = 2\gamma_1 r_0 u_1^s(r_0) - H_{1p}^s$ ;  $H_{1p}^s$ ,  $H_{2p}^s$  визначають з уравненням (23).

Аналогічно знаходимо переміщення, що відповідають першому наближенню, в такому ж кусково-неоднорідному циліндрі, але тепер вважати-мемо, що область  $r_{p-1} < r < r_p$  складена з  $n_p$  концентричних циліндричних шарів, кожен з яких має модулі пружності  $E_p(t_p, r)$ , коефіцієнти Пуассона  $\nu_p(t_p, r)$  і коефіцієнти лінійного розширення  $\alpha_{tp}(t_p, r)$  ( $p = \overline{1, n}$ ). У цьому випадку відповідні формули для переміщень матимуть також вигляд (22), в яких тепер вхідними будуть відповідні параметри задачі термопружності для  $N$  шарового циліндра, де  $N = \sum_{p=1}^n n_p$ .

Далі порівнюємо переміщення, підраховані на основі перших наближень для  $n$  і  $N$  шарових циліндрів. Якщо різниця між їх значеннями на одних і тих самих поверхнях знаходиться не в межах заданої точності, то збільшуємо  $n_p$ , повторюємо процедуру знаходження перших наближень і порівнюємо на тих самих поверхнях переміщення, отримані в суміжних процедурах. Такий процес продовжуємо, доки не буде досягнута задана точність.

Зауважимо, що радіальні деформації і напруження, які відповідають (21), визначатимемо за формулами

$$\begin{aligned}
 \frac{du_p^{*s}(\rho)}{d\rho} &= \Lambda_{sp}^*(\rho) - \frac{1}{\rho^2} V_{sp}^*(\rho) + \frac{1}{2Q} [R_{1p}^{*s} \phi_{4p}(\rho) - R_{2p}^{*s} \phi_{3p}(\rho)]; \quad (24) \\
 \sigma_{rp}^{*s}(\rho) &= \sigma_{rp}^{*s(1)}(\rho), \quad \sigma_{\varphi p}^{*s}(\rho) = \sigma_{\varphi p}^{*s(2)}(\rho), \\
 \sigma_p^{*s(j)}(\rho) &= (-1)^j \frac{E_{0p}}{1 + \nu_{0p}} \left[ \frac{V_{sp}^*(\rho)}{\rho^2} - \Lambda_{sp}^*(\rho) \delta_{2j} \right] + \frac{c_{0p}^*}{2Q} [R_{1p}^{*s} \psi_p^{*(1j)}(\rho) - R_{2p}^{*s} \psi_p^{*(2j)}(\rho)], \\
 \sigma_{zp}^{*t}(\rho) &= \bar{\sigma}_{zp}^{*t} - \frac{E_{0p}}{1 - \nu_{0p}} \Phi_p(\rho), \quad \sigma_{zp}^{*y} = \bar{\sigma}_{zp}^{*y}, \quad \sigma_{zp}^{*\varepsilon} = \bar{\sigma}_{zp}^{*\varepsilon} - \frac{E_{0p}}{1 - \nu_{0p}^2}, \quad k_{1p}^* = \frac{1}{1 + \nu_{0p}}, \\
 \bar{\sigma}_{zp}^{*s} &= -\frac{\lambda_{0p}}{Q r_p^2} (R_{1p}^{*s} M_{2p}^- + R_{2p}^{*s} r_p^2 M_{1p}^+), \quad (25)
 \end{aligned}$$

де

$$\Psi_p^{*(1j)}(\rho) = \frac{(-1)^j M_{2p}^+ k_{0p}}{\rho^2} - \frac{M_{2p}^- k_{1p}^*}{r_p^2}, \quad \Psi_p^{*(2j)}(\rho) = M_{1p}^+ k_{1p}^* + \frac{(-1)^j M_{1p}^- r_{p-1}^2 k_{0p}}{\rho^2}, \quad j = 1, 2.$$

За сталих модулів пружності і коефіцієнтів Пуассона осьову деформацію  $\varepsilon_z^*$  знайдемо зі співвідношення

$$-\varepsilon_z^* \sum_{p=1}^n \sigma_{zp}^* \frac{r_p^2 - r_{p-1}^2}{2} = \frac{P}{2\pi} + \sum_{p=1}^n \frac{E_{0p}}{1 - \nu_{0p}} V_{tp}^*(r) - \sum_{p=1}^n (\bar{\sigma}_{zp}^{*t} + \bar{\sigma}_{zp}^{*y}) \frac{r_p^2 - r_{p-1}^2}{2}.$$

**Числові результати.** Нехай внутрішня і зовнішня поверхні порожнистого циліндра, виготовленого з функціонально-градієнтного матеріалу [5], підтримуються відповідно при температурах  $t_c^- = 627^\circ\text{C}$  і  $t_c^+ = 1527^\circ\text{C}$  та перебувають під дією стискальних напружень  $\sigma_r(r_0) = -0.033$  [ГПа],  $\sigma_r(r_n) = -0.015$  [ГПа], а торці теплоізовані і вільні від навантажень. Дослідимо статичний термопружний стан такого циліндра з урахуванням температурної залежності ФМХ:

$$\begin{aligned} \lambda_t(t, r) &= \{(1 - P_*^{1/3})/\lambda_0 + P_*^{1/3}/[(1 - P_*^{2/3})\lambda_0 + P^{2/3}\lambda_a]\}^{-1}, \\ E(t, r) &= E_0(1 - P_*)/\{1 + P_*(5 + 8\nu(t, r))(37 - 8\nu(t, r))/[8(1 + \nu(t, r))(23 + 8\nu(t, r))]\}, \\ \alpha_t(t, r) &= (\alpha_m(t)K_m V + \alpha_c(t)K_c(1 - V))/(K_m V + K_c(1 - V)), \\ \nu(t, r) &= \nu_m(t)V + \nu_c(t)(1 - V), \\ \lambda_0 &= \lambda_c(t) + 3\lambda_c(t)(\lambda_m(t) - \lambda_c(t))V/[3\lambda_c(t) + (\lambda_m(t) - \lambda_c(t))(1 - V)], \\ E_0 &= E_c(t)[E_c(t) + (E_m(t) - E_c(t))V^{2/3}]/[E_c(t) + (E_m(t) - E_c(t))(V^{2/3} - V)], \\ K_m &= E_m(t)/[2(1 - \nu_m(t))], \quad K_c = E_c(t)/[2(1 - \nu_c)], \end{aligned}$$

$$P_* = A(r - r_0)[1 - (r - r_0)], \quad V = [1 - (r - r_0)]^{m_*}, \quad 0 \leq A < 4, \quad 0.1 \leq m_* \leq 30.$$

Тут

$$\begin{aligned} \lambda_m(t) &= 5.741 + 0.017t \quad [\text{Вт/м } ^\circ\text{C}], \quad E_m(t) = 107.275 - 0.0565t \quad [\text{ГПа}], \\ \alpha_m(t) &= 8.747 \cdot 10^{-6} + 4.09 \cdot 10^{-9}t - 2.69 \cdot 10^{-12}t^2 \quad [^\circ\text{C}^{-1}], \quad 0^\circ\text{C} \leq t \leq 827^\circ\text{C}, \\ \alpha_m(t) &= 10.22911 \cdot 10^{-6} \quad [^\circ\text{C}^{-1}], \quad 827^\circ\text{C} \leq t \leq 1527^\circ\text{C}, \quad \nu_m(t) = 0.297 + 32 \cdot 10^{-6}t, \\ \lambda_c(t) &= 1.776 + 0.273 \cdot 10^{-3}t + 0.116 \cdot 10^{-6}t^2 \quad [\text{Вт/м } ^\circ\text{C}], \\ E_c(t) &= 117.86 - 54.72 \cdot 10^{-3}t - 8.1 \cdot 10^{-6}t^2 \quad [\text{ГПа}], \end{aligned}$$

$\alpha_c(t) = 9.0868 \cdot 10^{-6} - 11.965 \cdot 10^{-9}t + 12.7 \cdot 10^{-12}t^2 \quad [^\circ\text{C}^{-1}]$ ,  $\nu_c(t) = 0.3$ ; величини з індексами « $m$ » і « $c$ » – ФМХ металу Ti-6Al-4V і кераміки ZrO<sub>2</sub> відповідно;  $\lambda_a$  – коефіцієнт теплопровідності повітря.

Розподіл температури  $t(\rho)$  знайдемо з інтегрального рівняння

$$t(\rho) = t_c^- + (t_c^+ - t_c^-) \left[ \int_{r_0}^{r_n} \frac{1}{\xi \lambda_t(t(\xi), \xi)} d\xi \right]^{-1} \int_{r_0}^{\rho} \frac{1}{\xi \lambda_t(t(\xi), \xi)} d\xi, \quad (26)$$

яке розв'язано методом послідовних наближень.

Під час визначення переміщень і напружень циліндр розглядали як неоднорідне тіло, складене з двадцяти шарів, відповідні ФМХ яких однакові і такі ж, як у циліндрі. У співвідношеннях для функцій Гріна ФМХ збігалися з відповідними неоднорідних шарів на їх серединних поверхнях.



На рис. 1-4 зображено розподіли переміщень  $\tilde{u} = u/(\alpha_* t_*)$  ( $\alpha_* t_* = 0.01527$ ) і напружень  $\tilde{\sigma}_j = \sigma_j/(E_* \alpha_* t_*)$  ( $j = r, \varphi, z; E_* = 60$  [ГПа]), при  $m_* = 1$ ,  $A = 3.74$ ,  $r_n = r_0 + 1$  у циліндрах різної товщини:  $r_0 = 1$  (криві 1); 0.1 (криві 2). Штрихові лінії побудовані за залежних від температури ФМХ металу і кераміки, а суцільні – за таких їх середньоінтегральних значень у розглядуваному діапазоні температур:  $\alpha_m = 10.29 \cdot 10^{-6}$  [°C<sup>-1</sup>],  $E_m = 46.42$  [ГПа],  $\nu_m = 0.332$ ,  $\alpha_c = 11.788 \cdot 10^{-6}$  [°C<sup>-1</sup>],  $E_c = 48.986$  [ГПа].

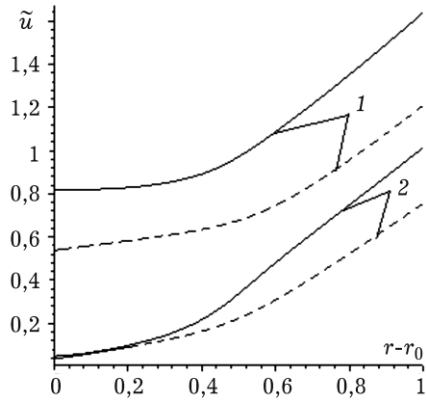


Рис. 1.

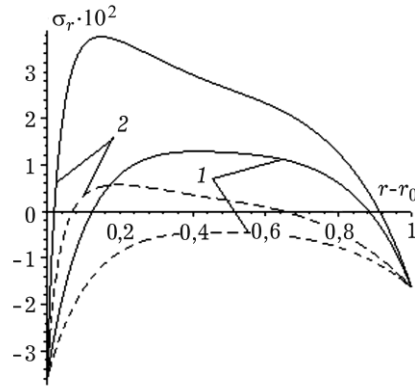


Рис. 2.

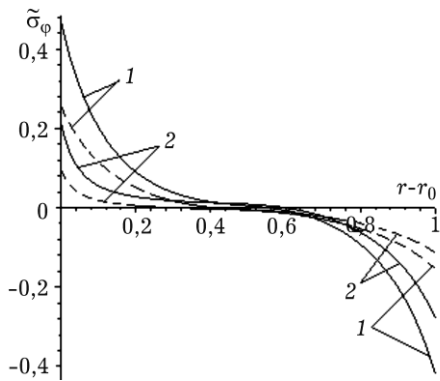


Рис. 3.

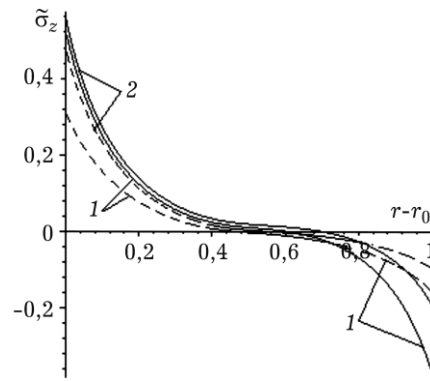


Рис. 4.

З аналізу рисунків бачимо, що максимальна різниця між переміщеннями (рис. 1) з незалежними і залежними від температури ФМХ становить  $\approx 57\%$ . За врахування термочутливості радіальні напруження (рис. 2) у тоншому циліндрі скрізь стискальні; максимальні розтягальні у товстшому циліндрі менші приблизно у 7.2 рази. Максимальних значень колові (рис. 3) і осьові (рис. 4) напруження досягають на обмежувальних циліндричних поверхнях, причому на внутрішній вони розтягальні, а на зовнішній – стискальні. За нехтування термочутливістю абсолютні значення колових та осьових напружень завищені, зокрема, у тоншому циліндрі на 104 і 151 та 86 і 117% відповідно на внутрішній і зовнішній поверхнях.

Абсолютна похибка відповідних значень переміщень і напружень від збільшення вдвічі кількості шарів не перевищувала  $10^{-4}$ .

**Висновки.** Запропоновано методику визначення термопружного стану, зумовленого одновимірним температурним полем та поверхневими наванта-

женнями, в кусково-неоднорідному термочутливому ізотропному циліндрі, яка передбачає отримання з використанням узагальнених функцій і функції Гріна задачі пружності для шаруватого циліндра зі сталими ФМХ складових відповідних систем інтегро-алгебричних рівнянь відносно радіальних переміщень та знаходження із цих рівнянь методом послідовних наближень переміщень, що відповідають лише першим наближенням. Методика апробована на модельній задачі термопружності для порожнистого циліндра з функціонально-градієнтного матеріалу. Встановлено істотний вплив на термомеханічну поведінку циліндра температурозалежності ФМХ.

1. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. – М: Наука, 1976. – 280 с.
2. Процюк Б. В. Квазістатичні задачі термопружності для кусково-неоднорідних термочутливих циліндричних тіл за однакових сталих коефіцієнтів Пуассона // Нестационарні процеси деформування елементів конструкцій, зумовлені дією полів різної фізичної природи / Під заг. ред. В. Д. Кубенка, Р. М. Кушніра, Д. В. Тарлаковського. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2012. – С. 174–178.
3. Процюк Б. В. Визначення термопружного стану кусково-неоднорідних термочутливих тіл з циліндричними поверхнями поділу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – 57, № 4. – С. 83–95.
4. Процюк Б. В. Застосування методу функцій Гріна до визначення термопружного стану шаруватих трансверсально-ізотропних сферичних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – 47, № 3. – С. 95–109.
5. Obata Y., Noda N. Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material // J. Thermal Stresses. – 1994. – 17. – P. 471–487.

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНОГО ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

*Изложена методика определения термоупругого состояния, обусловленного плоским осесимметричным температурным полем и поверхностными нагрузками, в слоистом изотропном цилиндре с учетом зависимости от температуры и координаты физико-механических характеристик (ФМХ). Методика предполагает получение из интегрального представления решения соответствующей задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с обобщенными производными систем интегро-алгебраических уравнений относительно радиальных перемещений и их решение предложенным способом. При этом использована функция Грина задачи упругости для слоистых цилиндров с постоянными ФМХ составляющих. Числовые исследования выполнены для цилиндра из функционально-градиентного материала.*

#### DETERMINATION OF THERMOELASTIC STATE OF PIECEWISE INHOMOGENEOUS THERMOSENSITIVE HOLLOW CYLINDER

*We present the procedure of determination the thermoelastic state caused by a plane axisymmetric temperature field and surface loads in layered isotropic cylinder with regard for the dependence on temperature and coordinate of physical-mechanical characteristics. The procedure involves obtaining (from integral representation) the solution of corresponding problem for an ordinary differential equation with generalized derivatives of the systems of integral-algebraic equations with respect to the radial displacements and their solution by the proposed method. We used Green's functions of elasticity problem for layered cylinders with constant physical-mechanical characteristics of components. Numerical studies were carried out for a cylinder made of functionally graded material.*