

## РОЗСІЯННЯ SH-ХВИЛЬ ПРУЖНИМ ВОЛОКНОМ ЗА НАЯВНОСТІ ТОНКОГО ГОСТРОКІНЦЕВОГО МІЖФАЗНОГО ВКЛЮЧЕННЯ МАЛОЇ ЖОРСТКОСТІ

*Запропоновано аналітико-числовий метод дослідження усталених хвильових полів у необмеженому пружному середовищі, розсіяних пружним волокном неканонічної форми за наявності тонкого міжфазного гострокінцевого включення малої жорсткості. Пружна система перебуває в умовах поздовжнього зсуву. Алгоритм дослідження базується на модифікованому методі нульового поля. Проаналізовано вплив механічних та геометричних параметрів композиту на амплітудно-частотні характеристики SH-хвиль, розсіяних волокном у дальню зону.*

**Вступ.** Задачі розсіяння пружних хвиль циліндричним волокном розглядали переважно за умов ідеального контакту між розсіювачем і зовнішнім середовищем (матрицею). Проте під час розробки сучасних засобів ультразвукової діагностики та неруйнівного контролю композитних матеріалів все частіше увага дослідників фокусується на проблемі врахування впливу міжфазних неоднорідностей на формування розсіяних хвильових полів. При цьому міжфазний контакт між складовими композиту моделюють тонким прошарком, що оточує розсіювач [3, 5, 9], або частковим відшаруванням волокна від матриці [1, 6, 7]. Відомо [6], що міжфазні тріщини є домінуючою причиною руйнування волокнистих матеріалів. Передумовою появи таких дефектів можуть бути тонкостінні міжфазні пружні включення, виявити які акустичними методами контролю неможливо без теоретичних досліджень. У цій статті розширено можливості методу нульового поля [1, 7, 8] для задачі розсіяння SH-хвилі волокном неканонічної форми за наявності тонкої міжфазної гострокінцевої пружної неоднорідності, коли характер розв'язків поблизу її країв має некореневі особливості.

**Формулювання задачі розсіяння.** Нехай у необмеженій ізотропній пружній матриці  $W_1$  із модулем зсуву  $\mu_1$  та густиною  $\rho_1$  міститься пружне циліндричне волокно неканонічного поперечного перерізу  $W_2 = R^2 \setminus W_1$  з відповідними параметрами  $\mu_2$  та  $\rho_2$ . На волокно набігає гармонічна SH-хвиля  $u^{in}(\mathbf{x})$ . За поздовжнього зсуву та усталених коливань переміщення в композиті задовольняють рівняння Гельмгольца:

$$(\Delta + k_j^2) u_j(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in W_j, \quad j = 1, 2; \quad u_1(\mathbf{x}) = u^{sc}(\mathbf{x}) + u^{in}(\mathbf{x}); \quad (1)$$

Тут  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  – декартові координати з центром всередині області  $W_2$ ;  $u_j(\mathbf{x})$  та  $k_j$  ( $j = 1, 2$ ) – переміщення та хвильові числа у матриці і волокні відповідно. Розсіяна хвиля  $u^{sc}(\mathbf{x})$  задовольняє умову випромінювання на безмежності

$$u^{sc}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ik_1 r + i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k_1 r}} f(\theta) + O(r^{-1}), \quad r \rightarrow \infty; \quad (2)$$

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

де  $f(\theta)$  – комплексна амплітуда розсіяння SH-хвилі;  $(r, \theta)$  – полярні координати.

На частині  $S_1$  міжфазної поверхні  $\partial W_2$  волокно ідеально контактує з матрицею:

$$u_1(\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x}), \quad \mu_1 \frac{\partial u_1(\mathbf{x})}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial u_2(\mathbf{x})}{\partial n}, \quad \mathbf{x} \in S_1. \quad (3)$$

На решті міжфазної межі  $S_0 = \partial W_2 \setminus S_1$  наявне тонке пружне включення, модуль зсуву  $\mu_0$  якого набагато менший, ніж у матриці та волокні ( $\mu_0 / \mu_j \ll 1$ ,  $j = 1, 2$ ). Товщину  $h(\mathbf{x})$  міжфазної неоднорідності характеризує малий безрозмірний параметр ( $l$  – довжина включення):

$$\varepsilon = l^{-1} \max_{\mathbf{x} \in S_0} h(\mathbf{x}) \ll 1,$$

Динамічну рівновагу тонкого включення низької жорсткості з навколишнім ізотропним середовищем можна асимптотично наближено змоделювати граничними умовами, записаними на лінії волокна [3]:

$$\begin{aligned} \gamma_1 [u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x})] &= h(\mathbf{x}) \frac{\partial u_1(\mathbf{x})}{\partial n}, \quad \gamma \frac{\partial u_1(\mathbf{x})}{\partial n} = \frac{\partial u_2(\mathbf{x})}{\partial n}, \quad \mathbf{x} \in S_0; \\ \gamma_1 &= \frac{\mu_0}{\mu_1}, \quad \gamma = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Надалі розглядатимемо гострокінцеві включення, для яких асимптотика функції  $h(\mathbf{x})$  в околі їх країв  $\mathbf{x}_\pm$  має вигляд

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) &\sim h_0 a^{-\delta} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_\pm|^\delta, \quad \mathbf{x} \in S_0, \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_\pm, \quad h_0 = \text{const} \neq 0, \quad \delta > 1; \\ \mathbf{x}_\pm &= (r_*(\theta_\pm), \theta_\pm), \end{aligned} \quad (5)$$

де функція  $r_*(\theta)$  описує контур волокна в полярній системі координат;  $a$  – характерний розмір його поперечного перерізу.

**Метод розв'язування задачі.** Вважаємо, що на неоднорідність набігає плоска гармонічна поперечна SH-хвиля:

$$\begin{aligned} u^{in}(\mathbf{x}) &= u_0 \exp[-ik_1(x_1 \cos \theta_{in} + x_2 \sin \theta_{in})] = u_0 \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m b_{\sigma m}^{in} \text{Re} \psi_{1\sigma m}(\mathbf{x}), \\ \psi_{j\sigma m}(\mathbf{x}) &= H_m^{(1)}(k_j r) C_{\sigma m}(\theta), \quad \text{Re} \psi_{j\sigma m}(\mathbf{x}) = J_m(k_j r) C_{\sigma m}(\theta), \quad j = 1, 2, \\ C_{1m}(\theta) &= \cos(m\theta), \quad C_{2m}(\theta) = \sin(m\theta), \quad b_{\sigma m}^{in} = (-i)^m C_{\sigma m}(\theta_{in}). \end{aligned} \quad (6)$$

Тут  $J_m(x)$  та  $H_m^{(1)}(x)$  – функції Беселя та Ганкеля першого роду порядку  $m$ ;  $u_0$  та  $\theta_{in}$  – амплітуда та кут падіння хвилі;  $\varepsilon_m = 2 - \delta_{m0}$  ( $\delta_{m0}$  – символ Кронекера).

Розв'язок задачі (1)–(6) шукаємо за допомогою методу нульового поля (методу  $T$ -матриць). Виходячи із інтегральних подань переміщень в областях  $W_1$  та  $W_2$ , отримуємо рівняння нульового поля [3]:

$$\begin{aligned} \int_{\partial W_2} \left[ u_1 \frac{\partial}{\partial n} \psi_{1\sigma m} - \psi_{1\sigma m} \frac{\partial}{\partial n} u_1 \right] dS &= 4iu_0 b_{\sigma m}^{in}, \\ \int_{\partial W_2} \left[ u_2 \frac{\partial}{\partial n} \text{Re} \psi_{2\sigma m} - (\text{Re} \psi_{2\sigma m}) \frac{\partial}{\partial n} u_2 \right] dS &= 0, \quad m = 0, \infty, \quad \sigma = 1, 2. \end{aligned} \quad (7)$$

Причому розсіяне поле подамо у вигляді

$$u^{sc}(\mathbf{x}) = \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} f_{\sigma m} \Psi_{1\sigma m}(\mathbf{x}), \quad |\mathbf{x}| > r_1,$$

$$f_{\sigma m} = \frac{i}{4} \int_{\partial W_2} \left[ u_1 \frac{\partial}{\partial n} \operatorname{Re} \Psi_{1\sigma m} - (\operatorname{Re} \Psi_{1\sigma m}) \frac{\partial}{\partial n} u_1 \right] dS, \quad (8)$$

де  $r_1$  – радіус кола, описаного навколо розсіювача.

Невідомі переміщення та напруження на контурі волокна шукаємо у вигляді рядів за системою тригонометричних функцій з ваговими множниками, що відображають характер поведінки шуканих функцій в околі країв міжфазного включення  $\mathbf{x}_{\pm}$ , які є точками зміни граничних умов. Для визначення структури розв'язків задачі (1), (3)–(5) поблизу країв неоднорідності застосуємо підхід, запропонований раніше [2, 4]. В результаті отримуємо асимптотичні розклади ( $a_{\pm}$  – коефіцієнти розкладів):

$$u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x}) = \frac{h_0}{\gamma_1} a^{-\delta} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\pm}|^{\delta} a_{\pm} + o\left(h_0 a^{-\delta} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\pm}|^{\delta}\right), \quad \mathbf{x} \in S_0, \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_{\pm};$$

$$\frac{\partial u_1(\mathbf{x})}{\partial n} = a_{\pm} + o(1), \quad \mathbf{x} \in S_1, \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_{\pm}. \quad (9)$$

Враховуючи (9), невідомі функції  $u^l$  та  $\partial u^l / \partial n$ ,  $l = 1, 2$  на  $\partial W_2$  подамо у вигляді

$$\frac{\partial u_1(\mathbf{x})}{\partial n} = a^{-1} \sum_{\sigma, m} x_{1\sigma m} C_{\sigma m}(\theta), \quad \mathbf{x} \in S_1;$$

$$u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x}) = Z_0(\theta) \sum_{\sigma, m} x_{1\sigma m} C_{\sigma m}(\theta), \quad \mathbf{x} \in S_0;$$

$$u_2(\mathbf{x}) = \sum_{\sigma, m} x_{2\sigma m} C_{\sigma m}(\theta), \quad \mathbf{x} \in \partial W_2; \quad (10)$$

$$Z_0(\theta) = \frac{h_0}{\gamma_1 a} \left( \frac{\tau(\theta)}{\theta_+ - \theta_-} \right)^{\delta}, \quad \tau(\theta) = a^{-1} \sqrt{(r'_*(\theta))^2 + r_*^2(\theta)}.$$

Підставивши (10) у рівняння нульового поля (7), з урахуванням граничних умов (3), (4) отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь безмежного порядку для визначення невідомих коефіцієнтів  $x_{1\sigma m}$ ,  $x_{2\sigma m}$ :

$$\sum_{\sigma', m'} (a_{1\sigma m, 1\sigma' m'} x_{1\sigma' m'} + a_{1\sigma m, 2\sigma' m'} x_{2\sigma' m'}) = 4iu_0 b_{\sigma m}^{in},$$

$$\sum_{\sigma', m'} (a_{2\sigma m, 1\sigma' m'} x_{1\sigma' m'} + a_{2\sigma m, 2\sigma' m'} x_{2\sigma' m'}) = 0, \quad m, m' = \overline{0, \infty}, \quad \sigma, \sigma' = 1, 2; \quad (11)$$

$$a_{1\sigma m, 1\sigma' m'} = \int_{S_0} \left( \frac{\partial \Psi_{1\sigma m}}{\partial n} - \frac{\gamma_1}{h(\theta)} \Psi_{1\sigma m} \right) Z_0(\theta) C_{\sigma' m'}(\theta) dS - \frac{1}{a} \int_{S_1} \Psi_{1\sigma m} C_{\sigma' m'}(\theta) dS,$$

$$a_{1\sigma m, 2\sigma' m'} = \int_{\partial W_2} \frac{\partial \Psi_{1\sigma m}}{\partial n} C_{\sigma' m'}(\theta) dS,$$

$$a_{2\sigma m, 2\sigma' m'} = \int_{\partial W_2} \frac{\partial \operatorname{Re} \Psi_{2\sigma m}}{\partial n} C_{\sigma' m'}(\theta) dS,$$

$$a_{2\sigma m, 1\sigma' m'} = -\gamma \gamma_1 \int_{S_0} \frac{1}{h(s)} \operatorname{Re}(\psi_{2\sigma m}) Z_0(\theta) C_{\sigma' m'}(\theta) dS - \frac{\gamma}{a} \int_{S_1} \operatorname{Re}(\psi_{2\sigma m}) C_{\sigma' m'}(\theta) dS.$$

Систему рівнянь (11) розв'язуємо методом редукції. Комплексну амплітуду розсіяння SH-хвиль, враховуючи (2), (8), (10), подамо у вигляді

$$f(\theta_{sc}) = \sum_{\sigma, m} \varepsilon_m i^{-m} A_{\sigma m} C_{\sigma m}(\theta_{sc}),$$

$$A_{\sigma m} = \sum_{\sigma', m'} (x_{1\sigma' m'} \operatorname{Re} a_{1\sigma m, 1\sigma' m'} + x_{2\sigma' m'} \operatorname{Re} a_{1\sigma m, 2\sigma' m'}),$$

де  $\theta_{sc}$  – кут спостереження хвиль у дальній зоні.

**Числовий аналіз амплітуд розсіяння.** Припускаємо, що в епоксидній матриці ( $\mu_1 = 1,28$  ГПа,  $\rho_1 = 1250$  кг/м<sup>3</sup>) міститься скляне волокно ( $\mu_2 = 29,9$  ГПа,  $\rho_2 = 2550$  кг/м<sup>3</sup>), контур поперечного перерізу якого задає параметричне рівняння

$$r(\alpha) = a \sqrt{\frac{1 + \beta^2 - 2\beta \cos[(N+1)\alpha]}{1 - \beta^2 N}}, \quad \theta(\alpha) = \arctg \frac{\sin \alpha + \beta \sin(N\alpha)}{\cos \alpha - \beta \cos(N\alpha)}, \quad (12)$$

$$0 \leq \alpha \leq 2\pi.$$

Товщину включення приймаємо у вигляді

$$h(\mathbf{x}) = 4^\delta \varepsilon a (\theta - \theta_-)^\delta (\theta_+ - \theta)^\delta / (\theta_+ - \theta_-)^{2\delta}, \quad \theta_- \leq \theta \leq \theta_+, \quad \mathbf{x} \in S_0. \quad (13)$$

На рис. 1 і 2 зображено спектральні залежності нормованих амплітуд розсіяння  $f_0 = u_0^{-1} |f(\theta_{sc})|$  за моностатичного зондування розсіювача ( $\theta_{sc} = \theta_{in}$ ).

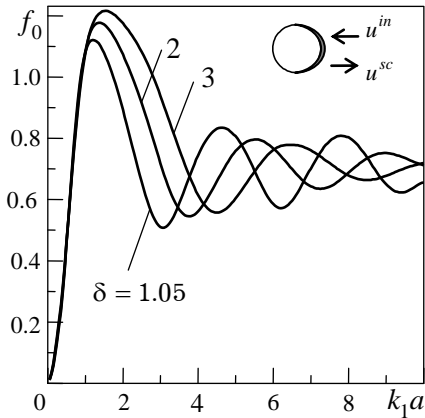


Рис. 1.

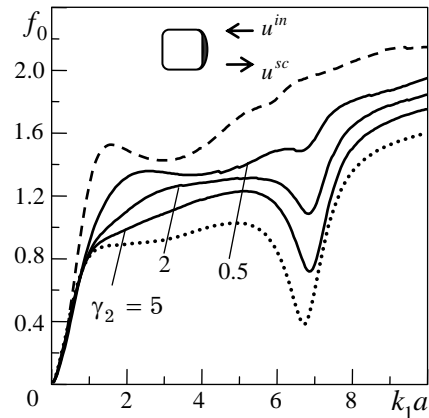


Рис. 2.

Рис. 1 ілюструє розсіяння плоскої хвилі ( $\theta_{in} = 0^\circ$ ) круговим волокном за різних параметрів  $\delta$  загострення країв міжфазної неоднорідності. Приймаємо, що параметр контрастності  $\gamma_2 = \mu_0 / \varepsilon \mu_1 = 0.5$ , а у співвідношеннях (12), (13)  $\beta = 0$ ,  $\theta_+ = -\theta_- = 90^\circ$ . Отже, в області низьких частот ( $k_1 a < 1$ ) нормована амплітуда розсіяння практично не залежить від форми міжфазної неоднорідності і зростає зі збільшенням параметра  $\delta$  в діапазоні резонансних частот  $1 < k_1 a < 3$ . За високих частот  $k_1 a > 3$  спектральні

залежності  $f_0$  мають періодично розташовані максимуми та мінімуми. Вони спричинені інтерференцією відбитої хвилі, сформованої в околі центральної точки міжфазної неоднорідності  $\theta = 0^\circ$ , і хвилями, дифрагованими її краями. При цьому зі збільшенням параметра  $\delta$  максимум амплітуди дифрагованих хвиль спадає.

На рис. 2 проілюстровано реакцію композиту із квадратним волокном (у (12)  $N = 3$ ,  $\beta = 1/9$ ) на проходження в ньому плоскої хвилі за різних значень параметра контрастності тонкостінного включення  $\gamma_2$  (суцільні криві). Штрихова крива відповідає міжфазній тріщині, а точкова – ідеальному контакту волокна і матриці. Фронт набігальної хвилі паралельний стороні волокна ( $\theta_{in} = 0^\circ$ ), на якій розташоване включення із гострими кінцями ( $\delta = 2$ ). Спектральні залежності  $f_0$  у розглянутому діапазоні частот, в основному, монотонні, за винятком околу частоти  $k_1 a \approx 7$ , що відповідає резонансному збудженню волокна за його ідеального контакту із матрицею [3]. Цей ефект обумовлений тим, що на відміну від кругового волокна, хвилі, дифраговані в околі вершин включення, майже збігаються за фазою із відбитою і їх амплітуди в дальній зоні розсіювача підсумовуються. Зі зростанням жорсткості міжфазного включення рівні нормованих амплітуд розсіяних хвиль зменшуються.

**Висновки.** Метод нульового поля розвинуто для задач розсіяння SH-хвиль пружним волокном неканонічної форми за наявності тонкого міжфазного гострокінцевого включення малої жорсткості. За допомогою запропонованого підходу встановлено, що вплив форми міжфазної неоднорідності на амплітуди розсіяних хвиль суттєвий в області резонансних і високих частот. Зі зростанням жорсткості міжфазного включення вони зменшуються.

Запропоновану методику можна поширити на задачі розсіяння поздовжніх та вертикально-поляризованих поперечних хвиль у волокнистих композитах з тонкими міжфазними дефектами.

1. Кунець Я. І., Матус В. В. Ефективні динамічні параметри матричного композиту з частково відшарованими волокнами неканонічної форми // Акустичний вісник. – 2012. – **15**, № 4. – С. 39–45.
2. Кунець Я. І., Рабош Р. В. Поздовжній зсув пружного середовища з тонким прямолінійним гострокінцевим п'єзоелектричним включенням низької жорсткості // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 3. – С. 141–146.
3. Кунець Я., Матус В. Розсіяння SH-хвилі пружним волокном неканонічного поперечного перерізу за наявності тонкого міжфазного прошарку // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2014. – Вип. 20. – С. 132–139.
4. Мовчан А. Б., Назаров С. А. Напряженно-деформированное состояние в вершине острого включения // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 3. – С. 155–163.
5. Cai L.-V. Scattering of antiplane shear waves by layered circular elastic cylinder // J. Acoust. Soc. Am. – 2004. – **115**, № 2. – С. 515–522.
6. Kim J.-Y. Attenuation and speed of antiplane shear wave in fiber-reinforced composites with random interfacial cracks // Int. J. Solids and Struct. – 2001. – **38**. – P. 7121–7137.
7. Kunets Y. I., Matus V. V., Mykhas'kiv V. V. et al. Scattering of a SH-wave by an elastic fiber of nonclassical cross section with an interface crack // Mech. Composite Materials. – 2008. – **44**. – P. 165–172.
8. Mishchenko M.I., Martin P.A. Peter Waterman and T-matrix methods // J. of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer. – 2013. – **123**. – P. 2–7.

9. Wang X., Sudak L. J. Scattering of elastic waves by multiple elastic circular cylinders with imperfect interface // Waves in Random and Complex Media. – 2007. – 17, № 2. – P. 159–187.

**РАСSEЯНИЕ SH-ВОЛН УПРУГИМ ВОЛОКНОМ ПРИ НАЛИЧИИ ТОНКОГО ОСТРОКОНЕЧНОГО МЕЖФАЗНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ МАЛОЙ ЖЕСТКОСТИ**

*Предложен аналитико-численный метод изучения установившихся волновых полей в неограниченной упругой среде, рассеянных упругим волокном неканонической формы при наличии тонкого межфазного остроконечного включения малой жесткости. Упругая система находится в условиях продольного сдвига. Алгоритм исследования базируется на модифицированном методе нулевого поля. Проанализировано влияние механических и геометрических параметров композита на амплитудно-частотные характеристики SH-волн, рассеянных волокном в дальнюю зону.*

**SCATTERING OF A SH-WAVE BY AN ELASTIC FIBER WITH THIN PEAKED INTERPHASE INCLUSION OF LOW RIGIDITY**

*An analytical-numerical method is proposed to study the stationary wave fields in unbounded elastic medium scattered by elastic fiber of nonclassical cross section with thin interphase peaked inclusion of low stiffness. The elastic system is under the conditions of longitudinal shear. The procedure is based on the modified null-field method. Effect of mechanical and geometric parameters of composite on the spectral characteristics of far-field amplitude of SH-wave scattered by fiber is analyzed.*