

ЗАГАЛЬНИЙ ПІДХІД ДО МОДЕЛЮВАННЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ ЗАЛИШКОВИХ НАПРУЖЕНЬ

Запропоновано загальний підхід до дослідження довільних залишкових напружень шляхом їх математичного моделювання з розв'язуванням прямих задач механіки деформівного тіла, а також шляхом їх визначення в реальних конструкціях з розв'язуванням обернених задач неруйнівного контролю напружень. В основі підходу – факт безумовного зв'язку напружень з пружною деформацією, на якому ґрунтується руйнівний контроль напружень, та поняття незалежної від напружень вільної деформації, що впливає з цього факту. Розглянуто моделі поля вільної деформації для двох широких класів технологій утворення залишкових напружень – “плавлення–твердіння” та “з'єднання”.

У багатьох випадках міцність та надійність конструкцій визначають рівень та розподіл залишкових технологічних напружень [1, 5, 8, 9]. Тому вони залишаються одними з найцікавіших і водночас найскладніших об'єктів для дослідження. Труднощі теоретичного розрахунку (передбачення) поля тензора залишкових напружень зумовлені складністю математичного моделювання технологій, що призводять до їх виникнення [1, 5, 8, 9, 11, 13]. Водночас через неоднорідний розподіл та складний характер (дво-, тривісний) тензора залишкових напружень ускладнюється при його вимірюванні чи визначенні методами неруйнівного контролю. Тому, вивчаючи залишкові напруження, доволі часто змушені застосовувати різні методи руйнівного контролю [12, 14], що, зрозуміло, не задовольняє потреби сучасного виробництва високоточних та надійних конструкцій.

Неруйнівний контроль неоднорідних та складних напружених станів неможливий простим вимірюванням без відповідних математичних моделей. Проте розробка методів моделювання залишкових напружень, які б одночасно слугували основою математичних моделей неруйнівного контролю, непросте завдання, оскільки методологія теоретичного моделювання напружень та їх експериментального визначення базується на несумісних засадах. Причиною цього є різна суть поняття напруження в обох випадках. Предметом теоретичного дослідження, якому присвячена більшість літератури з механіки деформівного тіла, є можливі (віртуальні) розрахункові напруження, а експериментального, зокрема неруйнівного контролю, – дійсні (реальні) вимірювані напруження. Розрахункові напруження визначають як наслідок накопиченої деформації та інших змін (теплових, електромагнітних, хімічних тощо) початкового ненапруженого стану тіла. Відповідно кінематичне поняття деформації та фізичне початкового стану – основні в механіці, що закладені в її модельні рівняння стану та сумісності деформації. “Стеження” за утворенням напружень найкраще відповідає задачі розрахунку, прогнозування, але непридатне для діагностики. Маючи певні напруження, неможливо вказати, з якого саме початкового стану вони виникли і яка саме деформація при цьому накопичилась, тому що таких початкових станів незліченна кількість. Тому неможливо скористатися ні рівняннями сумісності деформації, ні рівняннями стану. З цього впливає головна теоретична проблема неруйнівного контролю напружень – брак (нестача) рівнянь для визначення складних напружених станів (що часто називають проблемою розділеного визначення компонент тензора напружень [8]). Таким чином, методологія визначення напружень за історією їх утворення неприйнятна для неруйнівного контролю залишкових напружень і малоефективна для їх розрахунку за складних технологій.

Феноменологічна основа методу та поняття вільної деформації.

Нижче пропонуємо підхід, який поєднує теоретичні засади моделювання та контроль напружень. Факт утворення напружень внаслідок деформації та інших змін деякого початкового стану доповнено фактом однозначного зв'язку між напруженнями і накопиченою пружною деформацією. Власне він лежить в основі руйнівного контролю, коли довільні напруження визначають, вимірюючи накопичену пружну деформацію. Таким чином, для експериментального визначення напружень вирішальне значення має не повна накопичена деформація, а тільки її пружна частина. З поєднання двох вказаних фундаментальних фактів впливає третій: повна деформація складається з двох фізично різних частин. Одна з них – пружна, пов'язана з напруженнями законом пружності, а інша – вільна, не пов'язана з ними. За означенням вільної деформації її неявне конститутивне рівняння впливає з умови відсутності напружень $\sigma = 0$, якщо її застосувати до визначального рівняння тензора напружень:

$$\sigma = \sigma(\varepsilon, Z, Z_0, \dots) = 0 \Rightarrow \varepsilon = \tilde{\varepsilon}(Z_0, Z, \dots). \quad (1)$$

Тут ε – тензор повної накопиченої деформації; Z_0, Z – пара початкового та поточного значень певного базисного параметра стану (наприклад, температури); трикрапка – інші подібні пари. Загалом природа вільної деформації може бути довільною (тепловою, електромагнітною, хімічною тощо). Особливою випадком є пластична деформація, спричинена досягненням напруженого стану границі текучості, тобто її утворення пов'язане з напруженнями. Проте прямі пружного розвантаження на діаграмах “деформація–напруження” чітко вказують, що пластична деформація не пов'язана з ними. Говорячи про залишкові напруження, під вільною природою розуміти залишкову технологічну деформацію. В запропонованому методі поняття вільної деформації відіграє головну роль, тому сам метод можна назвати методом вільної деформації.

Вільна деформація як причина виникнення пружної. В межах лінійної моделі розбиття повної деформації на вільну та пружну має вигляд суми відповідних тензорів малих деформацій – $\tilde{\varepsilon}, \hat{\varepsilon}$:

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon} + \hat{\varepsilon}. \quad (2)$$

З умови сумісності повної деформації отримаємо, що несумісність поля вільної деформації компенсується несумісністю поля пружної:

$$\varepsilon = \text{sym} \nabla u \Leftrightarrow \text{Ink} \varepsilon \equiv \nabla \times (\nabla \times \varepsilon)^T = 0 \Rightarrow \text{Ink} \hat{\varepsilon} = -\text{Ink} \tilde{\varepsilon}. \quad (3)$$

Тут $\varepsilon = \text{sym} \nabla u$ – симетрична частина градієнта поля вектора переміщення u ; Ink – тензорний оператор несумісності; індекс «Т» означає транспоненту (інверсію) тензора довільного рангу. За залишкових напружень межа тіла вільна від зовнішнього навантаження, а об'ємні (масові) сили нехтують, так що рівняння рівноваги має вигляд

$$\text{div} \sigma \equiv \nabla \cdot \sigma = 0. \quad (4)$$

Згідно зі законом пружності Гука

$$\sigma = \Lambda : \hat{\varepsilon} \Leftrightarrow \hat{\varepsilon} = \Lambda^{-1} : \sigma, \quad (5)$$

де Λ – модуль пружності, тензор четвертого рангу; Λ^{-1} – обернений до нього тензор податливості. Підставимо другу з формул (5) в останню з рівностей (3). Отримаємо рівняння сумісності в термінах тензора напружень і вільної деформації:

$$\text{Ink}(\Lambda^{-1} : \sigma) = -\text{Ink} \tilde{\varepsilon}. \quad (6)$$

Ці рівняння разом зі системою рівнянь рівноваги (4) та умовами вільної від напружень границі складають повну систему рівнянь, з якої можна визначити тензор напружень, якщо поле тензора вільної деформації відоме. В

системі (4), (6) несумісне поле тензора вільної деформації виступає як *єдина кінематична причина виникнення несумісного поля тензора пружної деформації, а отже, і залишкових напружень*. Відповідно цей тензор є *єдиним безпосереднім кінематичним наслідком довільних фізичних процесів*, що призводять до виникнення залишкових напружень. Під час їх моделювання кінематичним наслідком технологічних процесів вважають повну деформацію, що узгоджується з методологією теоретичного дослідження напружених станів. Натомість, під час експериментального вивчення напружень методами контролю таким параметром є пружна деформація, однозначно пов'язана з напруженнями. Проте поле кожної з цих деформацій зв'язане певними умовами, які не залежать від технології виготовлення конструкції. Зокрема, поле повної деформації зв'язане рівняннями сумісності (3), а поле пружної – рівняннями рівноваги (4). Тому жодне з них не є безпосереднім кінематичним наслідком технологічних процесів, що спричинили залишкові напруження. Завдяки цій особливості поле несумісної вільної деформації є найзручнішим засобом (принаймні теоретично) як моделювання залишкових напружень, так і їх експериментального визначення методами неруйнівного контролю.

За напруженнями в тілі неможливо встановити повну деформацію, накопичену під час виникнення напружень, а лише її пружну складову. Це означає, що неможливо встановити накопичену вільну деформацію. Проте в цьому немає потреби. Досліджуючи залишкові напруження, необхідно встановити можливу найімовірнішу несумісну деформацію, що відповідає певній технології і зумовлює ці напруження. Розглядаючи розбиття повної деформації на вільну і пружну та замінюючи дійсну вільну деформацію можливою, отримуємо змогу застосовувати поняття можливої повної деформації, а відтак – методологію теоретичного моделювання напружень у методах їх експериментального визначення.

Зрозуміло, що заміну дійсної вільної деформації на можливу слід строго обґрунтувати. Таким обґрунтуванням є принцип початкової незалежності поточного напруженого стану: *поточний напружено-деформований стан не залежить від довільного ненапруженого, вибраного за початковий для деформації*. Цей принцип повсякчас використовують під час формулювання модельних задач, розглядаючи напружений стан як наслідок деформації (та інших змін) довільного початкового ненапруженого стану, хоча математична побудова принципу неможлива за методологією моделювання напружень без розбиття повної деформації на вільну і пружну [6]. З означення обох складових одразу ж випливає, що незалежність поточного напружено-деформованого стану від довільного початкового – це його *незалежність від накопиченої вільної деформації*. Математичний аналіз (здійснений у межах загальної фізичної моделі вільної деформації [6]) принципу та наслідків з нього, що стосуються рівнянь стану, свідчить, що поняття вільної деформації має фундаментальне значення не лише для дослідження залишкових напружень, але й дійсних довільних.

Таким чином, маємо повне право замінювати дійсну вільну деформацію на можливу, що у підсумку призводить до пружної, тотожної дійсній. Завдяки правильному вибору поля можливої вільної деформації можна суттєво спростити формулювання задач теоретичного моделювання і, що найголовніше, експериментальне визначення залишкових напружень.

Якщо матеріал ізотропний [2], рівняння (5) зведемо до двох послідовних рівнянь Пуассона для кульової $\sigma : I$ та девіаторної $\text{Dev } \sigma$ частин тензора напружень відповідно:

$$\begin{aligned} (1 - \nu)\Delta(\sigma : I) &= -EI : \text{Ink } \tilde{\epsilon}, \\ (1 + \nu)\Delta \text{Dev } \sigma &= -\nabla\nabla(\sigma : I) + E(\text{Ink } \tilde{\epsilon} - (2 - \nu)(1 - \nu)^{-1}I : \text{Ink } \tilde{\epsilon}). \end{aligned} \quad (7)$$

Тут E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона; I – одиничний тензор другого рангу. Застосовуючи до рівнянь (7) оператор Лапласа, приходимо

до виразу для часткового розв'язку

$$\sigma_{\text{part}} = \frac{E}{1-\nu^2} \text{Ink} \left[\Delta \tilde{\Phi} - \frac{1}{1-\nu} I(\text{Ink } \tilde{\Phi}) : I \right],$$

для якого потрібно розв'язати рівняння вищого порядку, але з простішою правою частиною: $\Delta \tilde{\Phi} = \tilde{\varepsilon}$ [2]. Відповідний частковий розв'язок у переміщеннях має вигляд

$$u_{\text{part}} = 2\nabla \cdot \tilde{\Phi} + \frac{1}{1-\nu} \nabla [\nu \Delta (\tilde{\Phi} : I) - \nabla \cdot (\nabla \cdot \tilde{\Phi})].$$

Розв'язувальні рівняння для осесиметричного випадку та плоскої задачі наведено в праці [2], а для тонкостінних оболонкових елементів конструкцій – в монографії [1]. Отримані розв'язки нічого не дають, оскільки розбиття деформації на пружну та вільну не зменшує кількість шуканих функцій. Основне завдання методу – побудувати ефективну модель вільної деформації, враховуючи особливості технології виготовлення конструкцій із залишковими напруженнями. Нижче наведено дві математично різні моделі, що охоплюють чимало технологій.

Теплова модель вільної деформації. Особливістю багатьох технологій є плавлення матеріалу з подальшим твердненням до початкового стану. Це може стосуватися як виробу (литво), так і його частин (зварювання, напилювання). Вважатимемо, що головним чинником виготовлення є зміна температури, а силові фактори (зовнішнє навантаження, масові сили) можна знехтувати. Оскільки кінцева температура (на складі) готового виробу дорівнює початковій температурі затрачених заготовок та інших матеріалів, то накопичена температурна деформація $\tilde{\varepsilon}^0$ дорівнює нулю, а накопичена вільна – накопиченій пластичній (залишковій) $\tilde{\varepsilon}^*$. Якщо в тій чи іншій частині виробу пластичної деформації не було, то в ній відсутня й накопичена вільна деформація. Отже, приходимо до висновку про локалізацію поля вільної деформації: *накопичена вільна деформація зосереджена лише в тих частинах виробу, де відбулася пластична деформація*. Зазначимо, що цей висновок не стосується напружень, які можуть утворюватися й поза областями локалізації поля вільної несумісної деформації.

Розіб'ємо технологічний процес на дві фази – плавлення та тверднення. Наприкінці першої матеріал рідкий та в'язкий, наприкінці другої – твердий. Значення всіх величин наприкінці першої фази позначатимемо нижнім індексом «1», а кінцеві – індексом «2». У рідкій фазі границя текучості набагато нижча, ніж у твердій, тому вважаємо її нульовою: $\sigma_{T2} \gg \sigma_{T1} \approx 0$. Напруження та відповідно накопичена пружна деформація також несуттєві: $\sigma_1 \approx 0 \Rightarrow \hat{\varepsilon} \approx 0$. Зазначимо, що отримана оцінка для накопиченої деформації не залежить від м'якості матеріалу, оскільки, що він м'якший, то більше пружна деформація подібна на вільну. Так як наприкінці рідкої фази пружна деформація відсутня, то вся накопичена дорівнює вільній $\varepsilon_1 \approx \tilde{\varepsilon}_1$. А це означає, що накопичена наприкінці рідкої фази вільна деформація сумісна, а тому не впливає на утворення залишкових напружень. Враховуючи, що повна вільна деформація дорівнює сумі температурної та пластичної, отримаємо:

$$\text{Ink} \tilde{\varepsilon}_1 = \text{Ink}(\tilde{\varepsilon}_1^* + \tilde{\varepsilon}_1^0) \approx 0 \Rightarrow \text{Ink} \tilde{\varepsilon}_1^* \approx -\text{Ink} \tilde{\varepsilon}_1^0. \quad (8)$$

Таким чином, на початку тверднення накопичена пластична деформація компенсує несумісність теплової. У фазі тверднення ріст залишкових напружень відставатиме від росту границі текучості. Тому виникнення пластичної деформації тут малоімовірно, а в крихкому матеріалі – взагалі неможливе. Єдиною причиною утворення залишкових напружень буде несумісне поле температурної деформації $\tilde{\varepsilon}_2^0$, накопиченої під час тверднення.

Оскільки повна температурна деформація дорівнює нулю, то

$$\tilde{\varepsilon}_2^0 = -\tilde{\varepsilon}_1^0 \Rightarrow \text{Ink}\tilde{\varepsilon}_2^0 = -\text{Ink}\tilde{\varepsilon}_1^0 \approx \text{Ink}\tilde{\varepsilon}_1^* = \text{Ink}\tilde{\varepsilon}^*. \quad (9)$$

У лівій частині цієї рівності – несумісність поля температурної деформації, накопиченої під час тверднення, в правій – сумарної пластичної, накопиченої головно під час плавлення. В підсумку несумісність поля накопиченої пластичної деформації дорівнює несумісності поля температурної у фазі тверднення. Відповідно обидва поля можна вважати саме тією вільною деформацією, яка і зумовлює залишкові напруження. Проте цей висновок правильний лише тоді, коли у початковому стані заготовки не мали залишкових напружень та несумісного поля початкової вільної деформації $\tilde{\varepsilon}_0$. У цьому загальнішому випадку пластична деформація компенсує не лише несумісність поля температурної до початку тверднення, але й несумісність початкового поля вільної деформації:

$$\text{Ink}\tilde{\varepsilon}^* = -\text{Ink}\tilde{\varepsilon}_1^0 + \text{Ink}\tilde{\varepsilon}_0 \neq -\text{Ink}\tilde{\varepsilon}_1^0 = \text{Ink}\tilde{\varepsilon}_2^0. \quad (10)$$

Отже, тут несумісність поля пластичної деформації вже не є формальною “причиною” утворення кінцевих залишкових напружень, тоді як температура й надалі залишається нею. Образно кажучи, участь пластичної та температурної деформацій у формуванні залишкових напружень можна описати так: саме температурна деформація на етапі тверднення “малює” картину кінцевої несумісності, натомість, на етапі плавлення готує чисте тло для цієї картини, “стираючи” початкову несумісність. Тензор пластичної деформації – девіатор. Тому виникає запитання, чи може поле девіатора компенсувати несумісність поля довільного тензора, зокрема й кульового, яким є тензор теплової деформації. Прості міркування свідчать, що завжди можна вказати поле девіатора $\tilde{\varepsilon}^*$, що має таку ж несумісність, як і поле заданого тензора $\tilde{\varepsilon}_0$. Шуканий девіатор шукатимемо у вигляді різниці між заданим тензором та сумісним з таким самим першим інваріантом. Наприклад, $\tilde{\varepsilon}^* = \tilde{\varepsilon}_0 - \text{sym}\nabla w$, де w – таке векторне поле, що $\nabla \cdot w = \tilde{\varepsilon}_0 : I$. Таким чином, побудову поля девіатора з заданою несумісністю зведено до задачі побудови векторного поля за заданою дивергенцією, яка має безліч розв’язків.

В ізотропному матеріалі температурна деформація є кульовим тензором $\tilde{\varepsilon}^0 = \tilde{\varepsilon}^0 I$. Отже, задачу визначення поля тензора залишкових напружень зводимо до визначення однієї скалярної функції $\tilde{\varepsilon}^0$. Це дає змогу здійснити замкнену поставу оберненої задачі, використовуючи лише одне додаткове рівняння неруйнівного контролю, яке характеризує вплив тензора залишкових напружень на зондувальний сигнал певної природи (наприклад, рівняння фото-, магнето-, чи акустопружності). Тому описана модель вирішує головну проблему неруйнівного контролю напружень, зумовлену браком необхідних рівнянь. Окрім того, теплова модель вільної деформації суттєво спрощує розв’язування оберненої задачі, якщо вона локалізована в областях, розміри яких набагато менші, ніж конструкції. Зокрема, під час зварювання така деформація локалізована біля шва, а залишкові напруження утворюються і на значній віддалі від швів. Окрім того, характер поля напружень складніший, ніж поля вільної деформації, яке якісно подібне на певне неоднорідне температурне поле.

За допомогою методу визначали залишкові напруження в різних тонкостінних оболонкових зварних та ливарних виробках зі скла [5] на основі експериментальних даних, отриманих за допомогою поляризаційно-оптичного методу. Інтегральні за товщиною значення різниці головних напружень вимірювали шляхом нормального просвічування, а поверхневі – тангенціального. Розв’язком оберненої задачі вважали поле вільної деформації, що

мінімізувало функціонал відхилення вимірюваних величин від їх теоретичних значень.

На рис. 1 наведено результати теоретико-експериментального визначення залишкових напружень у звареній поперечним швом циліндричній трубці радіусом 65.0 мм та товщиною $h = 2.0$ мм зі скла ($E = 625.0$ МПа, $\nu = 0.22$). Поле вільної деформації описує поліном, що залежить від осової координати α та нормальної γ – віддалі від серединної поверхні трубки:

$$\tilde{\varepsilon}^0(\alpha, \gamma) = \begin{cases} \sum_{i=0}^3 (\alpha - \alpha_0)^{2i} \sum_{j=0}^2 A_{ij} \gamma^j & (|\alpha| \leq \alpha_0), \\ 0 & (|\alpha| > \alpha_0). \end{cases} \quad (11)$$

Тут α_0 – осова координата межі поля вільної деформації, яку разом з коефіцієнтами A_{ij} знаходили з розв'язку оберненої задачі теорії оболонок. Лінії на графіках характеризують розрахований розподіл компонент тензора напружень та вимірюваних величин. Як бачимо, напруження поширюються за межі поля вільної деформації, а характер їх зміни немонотонний.

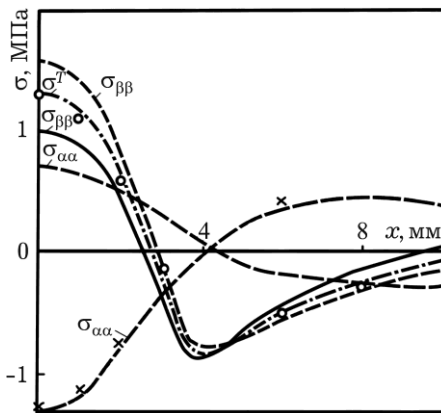


Рис. 1. Залишкові напруження біля поперечного зварного шва в циліндричній скляній трубці:
 x – віддаль від середини шва;
 $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\beta\beta}$ – поздовжні та колові напруження відповідно на зовнішній (суцільні лінії) та внутрішній (штрихові) поверхні трубки;
 $\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{\beta\beta}$ – середнє за товщиною значення різниці головних напружень;
 x та o – виміряні значення.

Вільна теплова деформація може бути наслідком не лише неоднорідного поля початкової температури твердої фази, а й неоднорідного поля коефіцієнта термічного розширення. Власне останнє і спричиняє залишкові напруження в оптичних волокнах. За допомогою теплової моделі вільної деформації досліджено залишкові напруження, що виникають у таких волокнах, з підтриманням поляризації променя внаслідок їх кусково-однорідної теплофізичної будови [3, 10]. Загальний розв'язок відповідної задачі плоскої деформації побудовано в аналітичному вигляді за допомогою методу сингулярних інтегральних рівнянь теорії функцій комплексної змінної. Залишкові напруження розраховано для кусково-однорідного поля вільної деформації в різних типових схемах будови волокон – “еліпс”, “панда”, “краватка-метелик”.

На рис. 2 зображено поля залишкових напружень у перерізі оптичного волокна “панда” радіусом $R_0 = 60.0$ мкм, що містить три жили кругового перерізу – центральну, світловедучу радіусом $R_1 = 7.0$ мкм та дві бічні, симетрично дотичні до центральної, з однаковими радіусами $R_2 = 19.0$ мкм. Модуль Юнга $E = 76.7$ ГПа та коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.186$ однакові для всього перерізу волокна, але різні лінійні коефіцієнти температурного розширення: в оболонці $\alpha_{t0} = 0.54 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, в центральній жилі $\alpha_{t1} = 2.125 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, у бічних $\alpha_{t2} = 1.45 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. Поле несумісної вільної деформації тут має вигляд

$$\rho \in G_i \Rightarrow \tilde{\varepsilon}^0(\rho) = (\alpha_{ti} - \alpha_{t0}) \Delta T \quad (i = 0, 1, 2), \quad (12)$$

де ρ – радіус-вектор точки в поперечному перерізі волокна; G_0 , G_1 , G_2 – поперечні перерізи відповідно оболонки, центральної та дотичних жил; $\Delta T = -850^\circ\text{C}$ – різниця температур під час тверднення волокна аж до кімнатної температури. В умовах плоскої деформації характеру розподілу вільної деформації (та коефіцієнтів температурного розширення) відповідає графік осьового напруження σ_{33} : внутрішні жили волокна перебувають у стані осьового розтягу, тоді як оболонка – стиску.

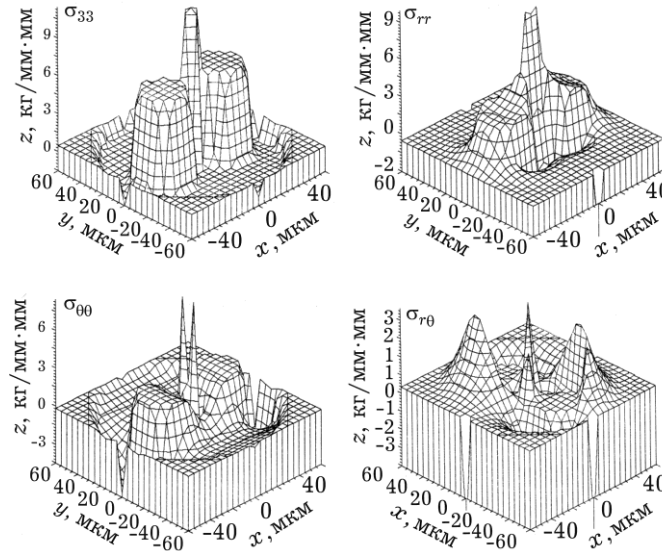


Рис. 2. Розподіл осьових σ_{33} , радіальних σ_{rr} , колових $\sigma_{\theta\theta}$ та зсувних $\sigma_{r\theta}$ залишкових напружень у перерізі оптичного волокна “панда”.

Ефект відпалу. Пластична деформація в зоні плавлення може бути доволі суттєва. Проте її значення не є показником впливу на утворення залишкових напружень. Більше того, враховуючи зв'язок пластичної деформації з границею текучості (що нижча границя текучості, то більша можлива деформація, але менші можливі технологічні напруження), приходимо до парадоксального висновку: що більша спостережувана пластична деформація, то слабший її вплив на формування напружень. Теплова деформація у фазі тверднення суттєво менша, ніж пластична у фазі плавлення, проте саме несумісність першої є безпосередньою причиною виникнення пружної деформації та відповідно – напружень. Модель теплової вільної деформації достовірна за умови, що пластична відбувається лише за низьких напружень (у розплавленому матеріалі). Тому таку технологію виникнення залишкових напружень природно назвати несиловою. Ця умова, очевидно, порушується, якщо пластична деформація протікає в матеріалі зі значними напруженнями, що можна назвати силовою технологією формування залишкових напружень. У цьому випадку несумісне поле накопиченої вільної деформації охоплюватиме й пластичну. Прикладом винятково силових технологій є штампування, автофретування, де залишкові напруження спричинені несумісною пластичною деформацією, викликаною значним тимчасовим зовнішнім навантаженням. Проте його наявність не обов'язкова, головне – значні технологічні напруження, що стали причиною пластичної деформації. Прикладом силової технології без зовнішнього навантаження є відпал залишкових напружень. Тут підігрів матеріалу зі значними напруженнями призводить до їх зменшення внаслідок пластичної

деформації. Отже, показником застосовності теплової моделі поля вільної деформації є плавлення матеріалу, а показником її неточності – пластична деформація за значних напружень. Наприклад, для зварювання одношаровим швом можна сказати, що ця модель достовірна в зоні шва, де матеріал плавиться. Натомість, на певній віддалі від нього, в зонах зі суттєво неоднорідним нагрівом, можливе відхилення від цієї моделі через пластичну деформацію за суттєвих технологічних напружень. Оскільки ця ситуація нагадує відпал, то зони можливого порушення теплової моделі вільної деформації природно назвати зонами відпалу, які прилягають (оточують) зону плавлення, вільну від напружень. Тому можна сподіватися, що ефект відпалу незначний або й відсутній безпосередньо навколо межі між зонами плавлення та відпалу, оскільки напруження релаксуватимуть в основному внаслідок пластичної деформації в зоні плавлення. Проте вглибині зони відпалу вплив пластичної деформації на несумісність поля вільної може бути відчутним. Отже, є технології, де ефект відпалу необхідно враховувати. Характерним прикладом технології “плавлення–тверднення з відпалом” є зварювання багатшаровим швом. Тут накладання нового шару шва спричиняє відпал у попередніх. Причому вплив відпалу на формування поля залишкових напружень посилюватиметься (порівняно з впливом теплової деформації) з кожним новим шаром. У такому разі поле вільної деформації не є кульовим, зокрема, для колового шва у циліндричній трубі, колова $\tilde{\epsilon}_{\beta\beta}$ та осьова $\tilde{\epsilon}_{\alpha\alpha}$ компоненти тензора вільної деформації будуть різні. Проте, застосовуючи для кожної з цих компонент наближення (11), знову ж таки зводимо обернену задачу реконструкції поля тензора залишкових напружень до знаходження скінченної множини числових констант.

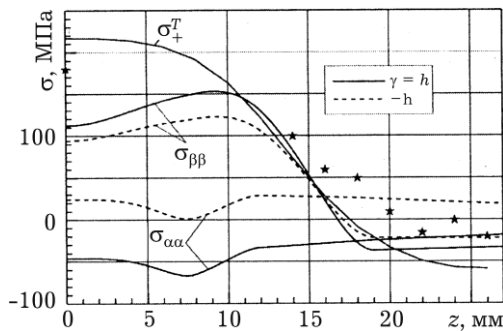


Рис. 3. Розподіл залишкових напружень біля поперечного зварного шва в циліндричній сталевій трубі: z – відстань від середини шва; $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\beta\beta}$ – поздовжні та колові напруження відповідно на зовнішній (суцільні лінії) та внутрішній (штрихові) поверхнях оболонки; зірочки – виміряні значення.

Рис. 3 ілюструє результати розрахунку залишкових напружень у зварній сталевій трубі ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.3$) діаметром 1420 мм і товщиною 18.7 мм за експериментальними даними про різницю $\sigma_+^T = \sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{\beta\beta}$ головних напружень на зовнішній поверхні труби на різних відстанях від шва, отриманими за допомогою магнітопружного перетворювача. Як бачимо, характер розподілу залишкових напружень тут суттєво відрізняється від зображеного на рис. 1.

Дислокаційна модель вільної деформації. Універсальний підхід до моделювання поля вільної деформації випливає з методики руйнівного контролю. Тіло із залишковими напруженнями розріжемо вздовж поверхонь із розтягальними так, щоб воно не розпалося на частини. Поверхні розрізів розійдуться, тобто в тілі виникнуть дислокації, відбудуться часткове розвантаження напружень та їх перерозподіл. Продовжуючи цю процедуру, можна знизити залишкові напруження до як завгодно малого рівня. Отримане майже вільне від напружень розрізане тіло можна розглядати як наслідок розривного поля переміщень \tilde{u} . Диференціюючи залежність вектора переміщень від радіус-вектора $\tilde{u}(r)$ як узагальнену функцію, отримаємо

вільну деформацію за відомим співвідношенням $\tilde{\epsilon} = \text{sym}\nabla\tilde{u}$. Таке поле сумісне всюди поза поверхнями дислокацій, тому його можна замінити дислокаційним $\tilde{\epsilon} = \text{sym}\nabla[\tilde{u}]$, де $[\tilde{u}]$ – стрибки переміщень на поверхнях дислокацій. Отже, в дислокаційній моделі використовують незалежність залишкових напружень від сумісної вільної деформації. Несумісність дислокаційного поля вільної деформації дорівнює нулю всюди, окрім певної множини поверхонь (тут поверхонь розриву поля переміщень). Цим воно подібне на розглянуте вище кусково-однорідне поле вільної деформації (12), несумісність якого також нульова, за винятком поверхонь розриву.

Дислокаційна модель поля несумісної вільної деформації дає змогу застосувати апарат математичної теорії тріщин або дислокацій. Зокрема, метод дисторсії [1], розроблений для розрахунку напруженого стану тонкостінних елементів конструкцій з розрізами, ґрунтується на моделюванні розрізів власне дислокаційним полем вільної деформації. Разом з тим між тілом з тріщинами та тілом з дислокаційним полем вільної деформації є певні принципові відмінності, які необхідно врахувати, формулюючи задачу. Напруження в околі тріщин утворюються внаслідок їх розкриття в суцільному тілі, а залишкові – через закриття дислокацій. На продовженні поверхні тріщини нормальні напруження, як правило, розтягальні та безмежні, а сама поверхня вільна від них. Натомість, на продовженні межі дислокації нормальні напруження стискальні та обмежені. Сама ж поверхня в центральній частині перебуває під дією розтягальних напружень (за означенням). Оскільки напруження обмежені на продовженні дислокації, то її береги на межі утворюють нульовий кут.

Загалом дислокаційне поле вільної деформації можна застосувати до моделювання довільних залишкових напружень, якщо мати уяву про розташування дислокацій, що в основному розвантажують тіло. Очевидно, що найкраще дислокаційна модель відповідає технологіям поверхневого з'єднання ненапружених частин конструкції – монтажу, склеюванню і певною мірою – зварюванню. Наприклад, природно припустити, що за послідовного зварювання двох циліндричних оболонок на кінцевій стадії виникає поперечна нормальна дислокація зварювання. В замкненій циліндричній оболонці Кірхгофа-Лява поле єдиної ненульової компоненти тензора вільної деформації тут має вигляд [4, 7]

$$\tilde{\epsilon}_{\alpha\alpha}(\alpha, \beta) = \begin{cases} [\tilde{u}(\beta)]\delta(\alpha) / R, & (|\beta| \leq \beta_0), \\ 0, & (\beta_0 < |\beta| \leq \pi), \end{cases}$$

де α та β – віднесені до радіуса оболонки R віддалі відповідно вздовж осі та твірного кола оболонки; β_0 – половина довжини дислокації $[\tilde{u}_\alpha(\beta)]|_{\alpha=0}$; $\delta(\alpha)\sqrt{a^2 + b^2}$ – дельта-функція. Функція стрибка переміщення задовольняє умови $[\tilde{u}(\beta)]|_{\beta=\beta_0} = [\tilde{u}(\beta)]'|_{\beta=\beta_0} = [\tilde{u}(\beta)]''|_{\beta=0} = 0$. Характерний розподіл віднесених осьових $\sigma_{\alpha\alpha}$ та колових $\sigma_{\beta\beta}$ напружень, зумовлених дислокацією,

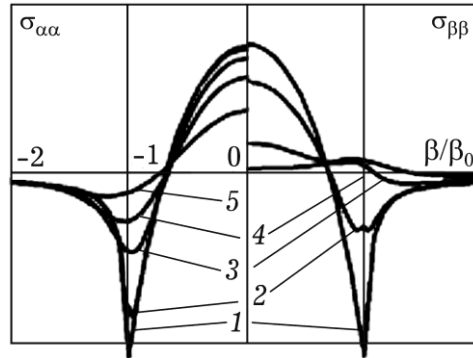


Рис. 4. Характерний розподіл осьових $\sigma_{\alpha\alpha}$ та колових $\sigma_{\beta\beta}$ напружень навколо поперечної нормальної дислокації довжиною β_0 у циліндричній оболонці. Лінії 1–5 відповідають різним відносним віддалям α / β_0 – 0,0; 0,05; 0,25; 0,5; 1,0.

зображено на рис. 4. Як бачимо, навколо кінців дислокації утворюється двовісний стискальний напружений стан (подібно, як навколо кінців тріщини – двовісний розтяг), а навколо центральної її частини – двовісний розтяг (чого, звісно, немає для тріщини з вільними берегами). З віддаленням від дислокації колові напруження спадають набагато швидше, ніж осьові.

Висновки. Теоретичне моделювання та розрахунок напружених станів методами механіки деформівного тіла ґрунтується на факті, що напруження є наслідком повної сумісної деформації та інших змін стану. Натомість, експериментальне дослідження напружень методами руйнівного контролю засноване на факті їх однозначного зв'язку з пружною деформацією. Зіставлення цих двох фундаментальних фактів призводить до поняття вільної деформації, яке лежить в основі запропонованого теоретико-експериментального методу дослідження залишкових напружень. З одного боку, саме несумісне поле вільної залишкової деформації є єдиною причиною виникнення несумісного поля пружної деформації та відповідно залишкових напружень. Якщо поле вільної деформації відоме, то визначення поля залишкових напружень зводиться до розв'язування крайової статичної задачі механіки деформівного тіла. З іншого боку, саме поле несумісної вільної залишкової деформації є єдиним кінематичним наслідком фізико-хімічних процесів, що спричиняють залишкові напруження. Воно не зв'язане рівняннями сумісності, як поле повної деформації, чи рівняннями рівноваги, як поле залишкових напружень та пружної деформації, а тому безпосередньо наочніше відтворює вплив технологічних процесів на формування залишкових напружень. Завдяки цьому метод вільної деформації дає змогу ефективно подолати головні труднощі, що виникають під час теоретичного та експериментального дослідження залишкових напружень. У першому випадку – це відсутність інформації про перебіг технологічних процесів виникнення залишкових напружень, яка необхідна для формулювання відповідної крайової задачі теоретичної механіки деформівного тіла. У другому – брак розв'язувальних рівнянь та додаткової інформації для замкненої та коректної постави оберненої задачі неруйнівного контролю напружень. Запропоновані дві моделі вільної деформації – теплова та дислокаційна – дають змогу здійснити замкнену та обернену постави обернених задач неруйнівного контролю залишкових напружень для широкого кола технологій.

1. Кир'ян В. І., Осадчук В. А., Николишин М. М. Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій. – Львів: СПОЛОМ, 2007. – 320 с.
2. Кушнір Р. М., Осадчук В. А., Прокопович І. Б., Чекурін В. Ф. Розв'язувальні рівняння механіки тіл з власними напруженнями // Доп. АН України. – 1993. – № 2. – С. 60–64.
3. Кушнір Р. М., Прокопович І. Б. Розрахунок температурних залишкових напружень в оптичних волокнах // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1991. – № 34. – С. 79–83.
4. Осадчук В. А., Прокопович І. Б., Сеньків Л. М., Чекурін В. Ф. Дислокаційне моделювання концентрації зварних залишкових напружень у тонкостінних елементах конструкцій // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, № 1. – С. 130–134.
5. Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Марголин А. М. Остаточные напряжения, длительная прочность и надежность стеклоконструкций. – К.: Наук. думка, 1991. – 296 с.
6. Прокопович І. Б. Принципи незалежності в рівняннях стану деформівного матеріалу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, № 3. – С. 53–64.
7. Chekurin V. F., Prokopovych I. B., Senkiv L. M. Application of crack theory methods to modeling residual stress concentrators in shells // Shell Structures: Theory and Applications (Proc. of the 8th SSTA Conf., Jurata, Poland, 12–14 October 2005). – Taylor & Francis Group (London; Leiden; New York; Philadelphia, Singapore), 2005. – P. 535–537.

8. *Handbook of Residual Stress and Deformation of Steel* / Edited by G. Totten, M. Howes and T. Inoue. – Ohio: ASM International, Materials Park, 2002. – 500 p.
9. Francis J. A., Bhadeshia H. K. D. H., Withers P. J. Welding Residual Stresses in Ferritic Power Plant Steels // *Mat. Sci. and Techn.* – 2007. – **23**. – P. 1009–1020.
10. Osadchuk V. A., Kushnir R. M., Prokopovich I. B. On the optimal design of Polarization-Maintaining Optical Fibers // *Pattern Recognition and Image Analysis.* – 1994. – **4**, № 3. – P. 367–370.
11. Silva C. C., Farias J. P. Nonuniformity of residual stresses in butt-welded pipes in manual arc welding // *J. of Mat. Proce. Techn.* – 2008. – **199**, № 1. – P. 452–455.
12. Trebuna F., Simcak F., Bocko J., Sarga P., Trebuna P., Pastor M., Mihok J. Quantification of residual stresses in the weld by hole-drilling method // *Metalurgija.* – 2008. – **47**, № 2. – P. 133–137.
13. Withers P. J., Bhadeshia H. K. D. H. Residual Stress Part 2 – Nature and Origin // *Mat. Sci. and Techn.* – 2001. – **17**. – P. 366–375.
14. Withers P. J., Bhadeshia H. K. D. H. Residual Stress Part 1 – Measurement Techniques // *Mat. Sci. and Techn.* – 2001. – **17**. – P. 355–365.

ОБЩИЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ И ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Предложен общий подход к исследованию произвольных остаточных напряжений как путем их математического моделирования с решением прямых задач механики деформируемого тела, так и путем их определения в реальных конструкциях с решением обратных задач неразрушающего контроля напряжений. В основе подхода – факт безусловной связи напряжений с упругой деформацией, на котором базируется разрушающий контроль напряжений, и понятие независимой от напряжений свободной деформации, которое следует из этого факта. Рассмотрены модели поля свободной деформации для двух широких классов технологий образования остаточных напряжений – «плавление-отверждение» и «соединение».

GENERAL APPROACH TO MODELING AND DETERMINATION OF THE RESIDUAL STRESSES

The general approach to investigation of the arbitrary residual stresses by mathematical modeling and resolving direct problems of mechanics of deformable bodies as well as by their determination in real constructions and resolving inverse problems of nondestructive testing of stresses is proposed. The approach is based on the fundamental fact of destructive stress testing about absolute connection between stresses and elastic deformation and the notion of stress-independent free deformation which follows from this fact. There are considered the field models of free deformation for two wide classes of residual stresses formation technologies – “melting-solidification” and “joining”.