

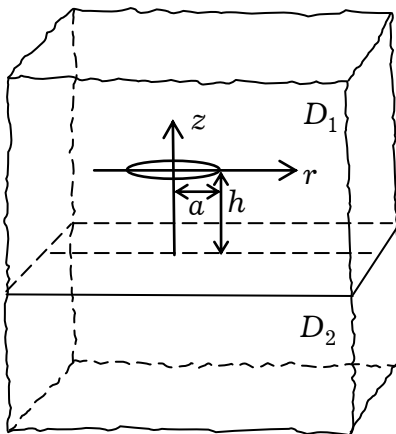
### ОСЕСИМЕТРИЧНЕ СТАЦІОНАРНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ У БІМАТЕРІАЛЬНОМУ ТІЛІ ЗА ТЕПЛОВИДІЛЕННЯ НА КРУГОВІЙ ОБЛАСТІ

*Розв'язано осесиметричну задачу стаціонарної теплопровідності для кусково-однорідного тіла, складеного з двох ідеально контактуючих півпросторів, в одному з яких міститься паралельне до межі поділу тепловидільне дискове включення. У граничних випадках одержано вирази для температури у півпросторі з теплоізолюваною межею або нульовою температурою на ній.*

Багато елементів сучасних конструкцій та інженерних споруд, виготовлених шляхом з'єднання двох різнорідних матеріалів, часто працюють в умовах нерівномірного нагрівання, коли виникають градієнти температури і температурні напруження. Для практики важливі дослідження термопружного стану тепловидільних елементів [1, 10]. Тому актуально вивчити напружений стан тіла з тепловидільними включеннями, а також визначити температурне поле [2, 5–7].

Осесиметричні задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для безмежного однорідного тіла з тепловидільним дисковим включенням розв'язані раніше [2, 7]. Таку ж задачу теплопровідності для кусково-однорідного тіла розв'язано в декартовій системі координат із використанням гармонічного потенціалу простого шару [6].

Нижче визначено осесиметричне стаціонарне температурне поле у складеному тілі з паралельним до межі поділу матеріалів тепловидільним дисковим включенням.



Розглянемо кусково-однорідний простір, складений з двох півпросторів  $D_1$  і  $D_2$  з різними коефіцієнтами теплопровідності  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$ . У півпросторі  $D_1$  розташоване паралельне до межі поділу на віддалі  $h$  від неї тонке дискове тепловидільне включення радіуса  $a$  (див. рисунок). Введемо циліндричну систему координат з початком у центрі включення. Стаціонарні температурні поля у півпросторах  $D_1$  і  $D_2$ , зумовлені тепловиділенням джерел тепла потужності  $w(r)$ , подамо у вигляді [4, 5, 7]

$$T_1(r, z) = F(r, z) + \kappa_1 F(r, z + 2h), \quad T_2(r, z) = \kappa_2 F(r, z), \quad (1)$$

$$F(r, z) = \frac{1}{\lambda_1} \int_0^{\infty} W(\eta) J_0(\eta r) e^{-\eta|z|} d\eta, \quad (2)$$

$$W(\eta) = \frac{1}{2} \int_0^a \rho w(\rho) J_0(\eta \rho) d\rho, \quad (3)$$

де  $J_0(u)$  – функція Бесселя.

На межі поділу матеріалів  $z = -h$  виконуються умови ідеального теплового контакту:

$$T_1(r, z) = T_2(r, z), \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1(r, z)}{\partial z} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(r, z)}{\partial z}, \quad \text{якщо } z = -h. \quad (4)$$

З граничних умов (4) маємо:

$$1 + \kappa_1 = \kappa_2, \quad 1 - \kappa_1 = \lambda^* \kappa_2, \quad \lambda^* = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Звідси

$$\kappa_1 = \frac{1 - \lambda^*}{1 + \lambda^*}, \quad \kappa_2 = \frac{2}{1 + \lambda^*}. \quad (5)$$

Величини (5) збігаються з наведеними раніше [6, 9, 11].

Задаючи різні вирази для функції  $w(\rho)$ , із подань (1)–(3) знаходимо температуру в довільній точці біматеріального тіла. Спрямувавши  $\lambda_2 \rightarrow \infty$  ( $\lambda^* = \infty$ ,  $\kappa_1 = -1$ ,  $\kappa_2 = 0$ ), дістанемо її значення для півпростору з тепловідільним дисковим включенням за нульової температури межі, а спрямувавши  $\lambda_2 \rightarrow 0$  ( $\lambda^* = 0$ ,  $\kappa_1 = 1$ ,  $\kappa_2 = 2$ ), одержимо температуру у півпросторі з теплоізолюваною межею [8]. Інтеграли у виразі (2) можна знайти числовими методами, проте на межі поділу матеріалів ( $h = 0$ ) і на осі  $Oz$  ( $r = 0$ ) їх обчислюють аналітично.

**Приклад 1.** Нехай потужність теплових джерел на включенні стала:  $w(\rho) = w_0$ . Тоді

$$W(\eta) = \frac{w_0 a}{2} \int_0^a \rho J_0(\eta \rho) d\rho = \frac{w_0 a J_1(\eta a)}{2\eta},$$

$$F(r, z) = \frac{w_0 a}{2\lambda_1} \int_0^\infty \eta^{-1} e^{-\eta|z|} J_0(\eta r) J_1(\eta a) d\eta. \quad (6)$$

Знайдемо температуру на осі  $Oz$  при  $r = 0$ . За формулою (6)

$$F(0, z) = \frac{w_0}{2\lambda_1} \left( \sqrt{a^2 + z^2} - |z| \right)$$

і згідно з формулами (1)

$$T_1(0, z) = \frac{w_0}{2\lambda_1} \left[ \sqrt{a^2 + z^2} - |z| + \kappa_1 \left( \sqrt{a^2 + (z + 2h)^2} - |z + 2h| \right) \right],$$

$$T_2(0, z) = \frac{w_0 \kappa_2}{2\lambda_1} \left( \sqrt{a^2 + z^2} - |z| \right).$$

Ці вирази збігаються з наведеними у праці [6].

Якщо включення знаходиться на межі поділу матеріалів ( $h = 0$ ), то температуру на ній ( $z = 0$ ) визначають формули

$$T(r, 0) = \frac{w_0 a \kappa_2}{2\lambda_1} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{r^2}{a^2}\right) = \frac{w_0 a \kappa_2}{\pi \lambda_1} E\left(\frac{r}{a}\right), \quad r \leq a,$$

$$T(r, 0) = \frac{w_0 a^2 \kappa_2}{4\lambda_1 r} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, \frac{a^2}{r^2}\right), \quad r \geq a,$$

де  $F$  – гіпергеометрична функція,  $E$  – еліптичний інтеграл другого роду.

Зокрема,  $T(0) = \frac{w_0 a \kappa_2}{2\lambda_1}$ ,  $T(a) = \frac{w_0 a \kappa_2}{\pi \lambda_1}$ .

**Приклад 2.** Нехай  $w(\rho) = \frac{w_0 a}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}$ . Тоді

$$\begin{aligned}
 W(\eta) &= \frac{w_0 a}{2} \int_0^a \frac{\rho J_0(\eta \rho)}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho = w_0 a \frac{\sin \eta a}{2\eta}, \\
 F(r, z) &= \frac{w_0 a}{2\lambda_1} \int_0^\infty \eta^{-1} e^{-\eta|z|} J_0(\eta r) \sin(\eta a) d\eta = \\
 &= \frac{w_0 a}{2\lambda_1} \arcsin \left[ \frac{2a}{\sqrt{(r-a)^2 + z^2} + \sqrt{(r+a)^2 + z^2}} \right]. \tag{7}
 \end{aligned}$$

Температуру  $T_1(r, z)$  і  $T_2(r, z)$  з урахуванням функції (7) визначають за формулами (1). На включенні, якщо  $z = 0$ ,  $r \leq a$ ,

$$T_1(r, 0) = \frac{w_0 a}{2\lambda_1} \left[ \frac{\pi}{2} + \kappa_1 \arcsin \frac{2a}{\sqrt{(r-a)^2 + 4h^2} + \sqrt{(r+a)^2 + 4h^2}} \right].$$

Якщо включення знаходиться на межі поділу матеріалів ( $h = 0$ ), то

$$T(r, 0) = \frac{\pi w_0 a \kappa_2}{4\lambda_1} \text{ при } r \leq a, \quad T(r, 0) = \frac{w_0 a \kappa_2}{2\lambda_1} \arcsin \frac{a}{r} \text{ при } r \geq a.$$

Температуру  $T_i(0, z)$  ( $i = 1, 2$ ) на осі  $Oz$ , якщо  $r = 0$ , обчислюють за формулами

$$\begin{aligned}
 T_1(0, z) &= \frac{w_0 a}{2\lambda_1} \left[ \arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} + \kappa_1 \arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2 + (z + 2h)^2}} \right], \\
 T_2(0, z) &= \frac{w_0 a \kappa_2}{2\lambda_1} \arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{w_0 a \kappa_2}{2\lambda_1} \operatorname{arctg} \frac{a}{z}. \tag{8}
 \end{aligned}$$

Отже, для всіх  $\lambda^*$  максимум температури  $T_1(0, z)$  знаходиться на включенні, зі збільшенням  $\lambda^*$  температура в тілі знижується, а для  $\lambda^* = 1$  (однорідне тіло) результати збігаються з літературними [3].

У таблиці подано значення температури  $\bar{T}_1(h) = 2\lambda_1 T_1(0, 0, h)/w_0 a$  в центрі включення залежно від його віддалі до межі поділу матеріалів  $h/a$  та різних значень  $\lambda^* = \lambda_2/\lambda_1$ , пораховане за формулою (8) при  $z = 0$ .

$\lambda^*$	$h/a$							
	0	0.1	0.3	0.5	0.8	1.0	5.0	10.0
0	3.14	2.94	2.60	2.36	2.13	2.03	1.67	1.62
0.5	2.09	2.02	1.91	1.83	1.75	1.72	1.60	1.58
1.0	1.57	1.57	1.57	1.57	1.57	1.57	1.57	1.57
2.0	1.04	1.11	1.22	1.30	1.38	1.41	1.53	1.55
5.0	0.52	0.65	0.88	1.04	1.19	1.26	1.50	1.54
10.0	0.28	0.44	0.72	0.92	1.11	1.19	1.49	1.53
50.0	0.06	0.25	0.58	0.81	1.03	1.12	1.47	1.52

Як бачимо, при  $h/a > 10$  межа поділу тіла не впливає на розподіл температури на включенні за довільних  $\lambda^*$ , а з виходом включення на теплоізолювану межу півпростору ( $\lambda^* = 0$ ) температура на ньому подвоюється порівняно з безмежним тілом.

**Приклад 3.** Нехай  $w(\rho) = \frac{w_0}{a} \sqrt{a^2 - \rho^2}$ . Тоді

$$W(\eta) = \frac{w_0}{2a} \int_0^a \rho \sqrt{a^2 - \rho^2} J_0(\eta\rho) d\rho = \frac{\sqrt{\pi a}}{2\sqrt{2}} w_0 \eta^{-\frac{3}{2}} J_{\frac{3}{2}}(a\eta),$$

$$F(r, z) = \frac{\sqrt{\pi a}}{2\sqrt{2}\lambda_1} w_0 \int_0^\infty \eta^{-\frac{3}{2}} e^{-\eta|z|} J_0(\eta r) J_{\frac{3}{2}}(a\eta) d\eta. \quad (9)$$

Якщо включення знаходиться на межі поділу матеріалів, то

$$F(r, 0) = \frac{\sqrt{\pi a}}{2\sqrt{2}\lambda_1} w_0 \int_0^\infty \eta^{-\frac{3}{2}} J_0(\eta r) J_{\frac{3}{2}}(a\eta) d\eta$$

і згідно з формулою (1)

$$T(r, 0) = \begin{cases} \frac{\pi w_0 a \kappa_2}{8\lambda_1} \left(1 - \frac{r^2}{2a^2}\right), & r \leq a, \\ \frac{w_0 a^2 \kappa_2}{6\lambda_1 r} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{a^2}{r^2}\right), & r \geq a. \end{cases}$$

Зокрема,  $T(0, 0) = \frac{\pi w_0 a \kappa_2}{8\lambda_1}$ ,  $T(a, 0) = \frac{\pi w_0 a \kappa_2}{16\lambda_1}$ .

Знайдемо температуру на осі  $Oz$ , якщо  $r = 0$ . За формулою (9)

$$F(0, z) = \frac{\sqrt{\pi a}}{2\sqrt{2}\lambda_1} w_0 \int_0^\infty \eta^{-\frac{3}{2}} e^{-\eta|z|} J_{\frac{3}{2}}(a\eta) d\eta = \frac{w_0 a^2}{6\lambda_1 \sqrt{a^2 + z^2}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{a^2}{a^2 + z^2}\right).$$

Температуру  $T_i(0, z)$  ( $i = 1, 2$ ) визначають так:

$$T_1(0, z) = \frac{w_0 a^2}{6\lambda_1} \left[ \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{a^2}{a^2 + z^2}\right) + \frac{\kappa_1}{\sqrt{a^2 + (z + 2h)^2}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{a^2}{a^2 + (z + 2h)^2}\right) \right],$$

$$T_2(0, z) = \frac{w_0 a^2 \kappa_2}{6\lambda_1 \sqrt{a^2 + z^2}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{a^2}{a^2 + z^2}\right).$$

**Висновки.** Розв'язана осесиметрична задача стаціонарної теплопровідності для безмежного тіла, складеного з двох ідеально контактуючих півпросторів, в одному з яких розташоване паралельне до межі поділу тепловидільне включення. Записані вирази для температури у кожному півпросторі. Показано, що при  $\lambda_2 \rightarrow 0$  або  $\lambda_2 \rightarrow \infty$  ці вирази збігаються з наведеними раніше [6, 8] для півпростору з теплоізолюваною межею або нульовою температурою на ній. На конкретних прикладах досліджено розподіл температури на межі поділу матеріалів і осі симетрії включення. Якщо коефіцієнт теплопровідності півпростору без включення більший, ніж з включенням, то температура у складеному тілі нижча, ніж в однорідному, і навпаки. З наближенням включення до теплоізолюваної межі півпростору ( $\lambda^* = 0$ ) температура на ньому подвоюється порівняно з безмежним тілом.

1. Власов Н. М., Федик И. И. Тепловыделяющие элементы ядерных ракетных двигателей. – М.: ЦНИИАтоминформ, 2001. – 208 с.
2. Галазюк В. А., Кіт Г. С. Осесиметричний напружено-деформований стан тіла з плоскою пеленою теплових джерел // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – 54, № 1. – С. 141–152.
3. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 488 с.

4. Кім Г. С., Хай М. В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1989. – 284 с.
5. Кім Г. С. Задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з тепловиділенням на круговій області (тріщині) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 4. – С. 120–128.
6. Кім Г. С., Андрійчук Р. М. Задача стаціонарної теплопровідності для кусково-однорідного простору за тепловиділення у круговій області // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2012. – Вип. 10. – С. 115–123.
7. Кім Г. С., Сушко О. П. Осесиметричні задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з теплоактивним або теплоізолюваним дисковим включенням (тріщиною) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 1. – С. 58–71.
8. Кім Г. С., Сушко О. П. Стаціонарне температурне поле у півбезмежному тілі з теплоактивним або теплоізолюваним дисковим включенням // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2011. – Вип. 13. – С. 67–80.
9. Процюк Б. В. Функції Гріна тривимірних статичних задач термопружності для кусково-однорідного простору // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 1. – С. 36–47.
10. Федик И. И., Колесов В. С., Михайлов В. Н. Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах. – М.: Энергоатом, 1985. – 280 с.
11. Mossakowski J. Thermal stresses in an elastic space with discontinuous physical properties // Arch. Mech. Stosow. – 1958. – № 10. – P. 243–258.

#### **ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ СТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В БИМАТЕРИАЛЬНОМ ТЕЛЕ ПРИ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИИ НА КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ**

*Решена осесимметричная задача стационарной теплопроводности для кусочно-однородного тела, составленного из двух идеально контактирующих полупространств, в одном из которых содержится параллельное к границе раздела тепловыделяющее дисковое включение. В предельных случаях получены выражения для температуры в полупространстве с теплоизолированной границей или нулевой температурой на ней.*

#### **AXISYMMETRIC STATIONARY TEMPERATURE FIELD IN BIMATERIAL BODY WITH HEAT GENERATION ON A CIRCULAR DOMAIN**

*Axisymmetric stationary heat conduction problem for a piecewise-homogenous body formed by two ideally contacting half-spaces one of which contains a heat-generating disk inclusion parallel to contact surface is solved. In the limiting cases expressions for temperature in the half-space with thermally insulated boundary or at zero temperature on it are derived.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
01.11.15