УДК 512.552.13

О. М. Романів, А. В. Саган

НЕКОМУТАТИВНІ ω-ЕВКЛІДОВІ КІЛЬЦЯ

Доведено, що праве ω-евклідове кільце є правим кільцем Безу та GE-кільцем. Показано, що праве кільце Ерміта стабільного рангу один є GE-кільцем, а також доведено, що воно є правим ω-евклідовим кільцем.

Всі кільця, які розглядаємо, є асоціативними з відмінною від нуля одиницею. Через $U(R)$ позначимо групу одиниць кільця R, а через $GL_n(R)$ − групу всіх оборотних матриць порядку n з елементами із R.

Під *елементарними* з елементами кільця R розуміємо квадратні матриці таких двох типів: 1) відмінні від одиничної деяким ненульовим елементом поза головною діагоналлю; 2) діагональні з оборотними елементами на головній діагоналі. Групу, породжену всіма елементарними матрицями n-го порядку над R, позначимо через $GE_n(R)$, а її підгрупу, породжену елементарними матрицями лише першого типу, − через $E_n(R)$ [1]. Крім того, для елементарних матриць другого порядку введемо такі позначення:

$$T(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \ [u,v] = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \text{ де } a \in R, \ \ u,v \in U(R).$$

Очевидно, $T(a) \in E_2(R)$, $[u,v] \in GE_2(R)$.

Групу $E_2(R)$ породжують матриці вигляду

$$F(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \text{ де } a \in R.$$

Дійсно,

$$T(a) = F(-a)\cdot(F(0))^3, \ \ (T(a))^T = (F(0))^3 \cdot F(a).$$

$$F(a) = (T(-1))^T \cdot T(1) \cdot (T(-1))^T \cdot (T(a))^T \in E_2(R),$$

$$(F(a))^{-1} = F(0)\cdot F(-a)\cdot F(0) \in E_2(R).$$

Крім цього, зауважимо, що

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = [-1,1]\cdot F(0) \in GE_2(R), \qquad F(a)\cdot[u,v] = [v,u]\cdot F(u^{-1}av).$$

Нехай k − фіксоване натуральне число, $a,b \in R$, причому $b \neq 0$. Якщо існують такі елементи $q_i, r_i \in R$, i=1,2,...,k, що

$$a = bq_1 + r_1, \ \ b = r_1 q_2 + r_2, \qquad\qquad , \ r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k, \tag{1}$$

то послідовність рівностей (1) називають *правим k-членним ланцюгом подільності* для пари елементів a,b. Зауважимо, що правий одночленний ланцюг подільності лwегко перетворюється у двочленний з тією ж остачею: якщо $a = bq + r$, то $a = b(q+1) + (-b+r)$, $b = (-b+r)(-1) + r$. Правий k-членний ланцюг подільності вигляду (1) називають *скінченним*, якщо $r_k = 0$ або $r_k = r_{k-1}$.

Нормою над кільцем R називають таке відображення $\varphi : R \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, що 1) $\varphi(0) = 0$ тоді і лише тоді, коли $a = 0$; 2) $\varphi(ab) \geq \varphi(a)$ для довільних таких елементів $a,b \in R$, що $ab \neq 0$.

Кільце R називають *правим* k*-евклідовим* стосовно норми φ, якщо для довільної пари елементів $a,b\in R, b\neq 0,$ та деякого натурального $n\leq k$ існує такий правий n-членний ланцюг подільності вигляду (1), що

$$\varphi(r_n)<\varphi(b). \tag{2}$$

Очевидно, що праве одноевклідове кільце є правим евклідовим. Кільце R називають *правим* ω*-евклідовим кільцем* стосовно норми φ, якщо φ задовольняє дві умови із означення норми і для довільної пари елементів $a,b\in R, b\neq 0,$ існує такий правий k-членний ланцюг подільності вигляду (1) для деякого такого натурального k, що $\varphi(r_k)<\varphi(b).$

Твердження. Нехай R – кільце. Еквівалентними є такі твердження:

1) R є правим ω-евклідовим кільцем;

2) для довільних елементів $a,b\in R, b\neq 0,$ існує скінченний правий ланцюг подільності.

Доведення. Нехай R – праве ω-евклідове кільце, $a,b\in R, b\neq 0$. Тоді існує такий правий k_1-членний ланцюг подільності для деякого натурального k_1

$$a=bq_1+r_1,\ \ b=r_1q_2+r_2,\ \ \dots\ ,\ \ r_{k_1-2}=r_{k_1-1}q_{k_1}+r_{k_1}, \tag{3}$$

що $\varphi(r_{k_1})<\varphi(b).$ Якщо $r_{k_1}=0,$ то доведення завершується. В іншому випадку розглянемо такий правий k_2-членний ланцюг подільності (k_2 – деяке натуране число) для елементів r_{k_1-1}, r_{k_1}

$$r_{k_1-1}=r_{k_1}q_{k_1+1}+r_{k_1+1},\ \ \dots\ ,\ \ r_{k_1+k_2-2}=r_{k_1+k_2-1}q_{k_1+k_2}+r_{k_1+k_2}, \tag{4}$$

що $\varphi(r_{k_1+k_2})<\varphi(r_{k_1}).$ Об'єднавши співвідношення (3) та (4), отримаємо правий (k_1+k_2)-членний ланцюг подільності для початкових елементів $a,b,$ причому $\varphi(r_{k_1+k_2})<\varphi(b).$ Якщо $r_{k_1+k_2}=0$, то твердження доведено. У іншому випадку розглянемо правий ланцюг подільності для елементів $r_{k_1+k_2-1}, r_{k_1+k_2}$ та застосуємо наведені вище міркування. Очевидно, що цей процес скінченний.

Імплікація з 2) в 1) очевидна.

Твердження доведено.

Наслідок 1. Якщо R – праве k-евклідове кільце, то для довільних $a,b\in R,\ b\neq 0$, існує скінченний правий ланцюг подільності.

Кільце R називають *правим кільцем Ерміта* [4], якщо для довільних елементів $a,b\in R$ існують елемент $d\in R$ і матриця $P\in GL_2(R)$, що $(a,b)P=(d,0)$. Кільце R називають *правим кільцем Безу* [3], якщо будь-який скінченнопороджений правий ідеал кільця R є головним. Праве кільце Ерміта є правим кільцем Безу.

Теорема 1. Нехай R – праве ω-евклідове кільце. Тоді

1) R є правим кільцем Ерміта;

2) R є правим кільцем Безу.

Доведення. Оскільки R – праве ω-евклідове кільце, то за поданим твердженням для кожної пари елементів $a,b\in R, b\neq 0$, існують такі елементи $q_i, r_i\in R$, що

$$a=bq_1+r_1,\ \ b=r_1q_2+r_2,\ \ \dots\ , r_{m-3}=r_{m-2}q_{m-1}+r_{m-1},\ \ r_{m-2}=r_{m-1}q_m$$

для деякого натурального m. Тоді

$$(a,b)\cdot(\prod_{i=1}^{m}F((-1)^{i-1}q_i))\cdot[(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}},1]=(r_{m-1},0)$$

і оскільки $(\prod_{i=1}^{m}F((-1)^{i-1}q_i))\cdot[(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}},1]\in GL_2(R)$, то, очевидно, R є правим кільцем Ерміта.

Для доведення факту, що праве ω-евклідове кільце є правим кільцем Безу, достатньо зауважити, що праве кільце Ерміта є правим кільцем Безу.

Теорему доведено.

Наслідок 2. Праве k-евклідове кільце є правим кільцем Ерміта та правим кільцем Безу.

Кільце R називають GE_n*-кільцем* [1], якщо групу $GL_n(R)$ породжують елементарні матриці n-го порядку.

Теорема 2. Нехай R − праве ω-евклідове кільце. Тоді

1) R є GE_2-кільцем;

2) R є GE_n-кільцем для довільного натурального n;

3) довільна оборотна матриця з елементами із R розкладається у скінченний добуток елементарних матриць.

Доведення. 1) Нехай $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in GL_2(R)$, де R − праве ω-евклідове кільце. Тоді з точністю до заміни місцями стовпців $aR+bR=R, b\neq 0,$ та існує скінченний правий ланцюг подільності

$$a=bq_1+r_1,\ \ b=r_1q_2+r_2,\ \ \dots\ ,\ \ r_{m-3}=r_{m-2}q_{m-1}+1,\ \ r_{m-2}=1\cdot q_m$$

для деякого $m\in\mathbb{N}$. Тому

$$A\cdot(\prod_{i=1}^{m}F((-1)^{i-1}q_i))\cdot[(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}},1]=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ x & y\end{pmatrix}\in GL_2(R),$$

$$T(-x)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0\\ x & y\end{pmatrix}=[1,y]\in GL_2(R),$$

а отже,

$$A=T(x)\cdot[1,y]\cdot(\prod_{i=1}^{m}F((-1)^{i-1}q_i))^{-1}\cdot[(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}},1]\in GE_2(R).$$

Індукція за розмірами матриць завершує доведення правильності тверджень 2) та 3) теореми 2.

Теорему доведено.

Наслідок 3. Праве k-евклідове кільце є GE_n-кільцем для довільного натурального n.

Кільце R називають *правим елементарним головним* [2], якщо для довільних елементів $a,b\in R$ існують такі елемент $c\in R$ і матриця $Q\in GE_2(R)$, що $(a,b)Q=(c,0)$. Очевидно, що праве елементарно головне кільце є правим кільцем Ерміта.

Нехай W − деякий ординал, тоді під *правим квазі-алгоритмом*, визначеним на кільці R, розумітимемо таку функцію $\psi: R\times R\to W,$ що для довільних елементів $a,b\in R,\ b\neq 0,$ існують такі елементи $q,r\in R,$ що $a=bq+r$ і $\psi(b,r)<\psi(a,b)$. Кільце R називають *правим квазі-евклідовим* [2], якщо на ньому задано правий квазі-алгоритм.

Теорема 3. Нехай R − праве ω-евклідове кільце. Тоді

1) R є правим елементарно головним кільцем;

2) R є правим квазі-евклідовим кільцем.

Доведення. 1) За теоремою 1 праве ω-евклідове кільце є кільцем Ерміта, а за теоремою 2 довільна оборотна матриця над правим ω-евклідовим кільцем є скінченним добутком елементарних матриць.

2) Достатньо зауважити, що клас правих квазі-евклідових кілець збігається з класом правих елементарно головних кілець [2].

Теорему доведено.

Наслідок 4. Праве k-евклідове кільце є правим квазі-евклідовим кільцем.

Кільце R має *стабільний ранг один*, якщо для таких довільних елементів $a, b \in R$, що $aR + bR = R$, існує такий елемент t, що $a + bt = u \in U(R)$.

Теорема 4. Праве кільце Ерміта стабільного рангу один є GE_2-кільцем.

Доведення. Розглянемо матрицю $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(R)$, де R − праве кільце Ерміта стабільного рангу один. Оскільки $aR + bR = R$, то існує такий елемент $t \in R$, що $a + bt = u \in U(R)$, а тому

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = T((c+dt)\,u^{-1}) \cdot [u, v] \cdot (T(u^{-1}b))^T \cdot T(-t) \in GE_2(R),$$

де $v = -(c + dt)u^{-1}b + d \in U(R)$.

Теорему доведено.

Теорема 5. Праве кільце Ерміта стабільного рангу один є правим ω-евклідовим.

Доведення. Нехай R − праве кільце Ерміта стабільного рангу один. Тоді для довільних елементів $a, b \in R, b \neq 0$, існують такі матриця $P \in GL_2(R)$ і елемент $d \in R$, що $(a, b)P = (d, 0)$. За попередньою теоремою кільце R є GE_2-кільцем, а тому існують такі елементи $u, v \in R$, $q_i \in R$, що

$$P = [u, v]T(q_1) \cdot T(q_2) \cdot \ldots \cdot T(q_m)$$

для деякого натурального m, тобто для пари елементів a, b існує скінченний ланцюг подільності.

Теорему доведено.

1. *Кон П*. Свободные кольца и их связи. − М.: Мир, 1975. − 422 с.
2. *Bougaut B*. Anneaux Quasi-Euclidiens. These de docteur troisieme cycle. − 1976. − 68 p.
3. *Henriksen M*. Some remarks about elementary divisor rings // Michigan Math. J. − 1955−1956. − **3**. − P. 159−163.
4. *Kaplansky I*. Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. − 1949. − **66**. − P. 464−491.

НЕКОММУТАТИВНЫЕ ω-ЭВКЛИДОВЫЕ КОЛЬЦА

Доказано, что правое ω-эвклидовое кольцо является правым кольцом Безу и GE-кольцом. Показано, что правое кольцо Эрмита стабильного ранга один является GE-кольцом, а также доказано, что оно является правым ω-эвклидовым кольцом.

NONCOMMUTATIVE ω-EUCLIDEAN RINGS

It is proved that a right ω-Euclidean ring is a right Bezout ring and GE-ring. It is also shown that a right Hermite ring of stable range 1 is a GE-ring. Moreover, it is proved that it is a right ω-Euclidean ring.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
21.09.15