УДК 517.98

В. Я. Лозинська

ПРО ЗГОРТКУ В АЛГЕБРІ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ω-УЛЬТРАРОЗПОДІЛІВ ТИПУ БЕРЛІНГА З КОМПАКТНИМИ НОСІЯМИ

Для поліноміального аналога ω-ультрарозподілів типу Берлінга з компактними носіями описано згортку та узагальнену операцію диференціювання. Доведено, що простір таких поліноміальних ω-ультрарозподілів є алгеброю відносно введеної операції згортки. Наведено властивості цієї алгебри.

Вступ. Алгебри розподілів та ультрарозподілів з тензорною операцією множення використовують у квантовій теорії поля [4]. Такі алгебри можна визначати на просторах диференційовних функцій нескінченної кількості змінних. Вони мають часто еквівалентну структуру скалярних поліномів з поточковим множенням. Дослідженням у цьому напрямку, зокрема, вивченню алгебр поліноміальних розподілів та поліноміальних ультрарозподілів присвячені праці [2, 7, 9, 10]. Побудовано [1] поліноміальний аналог ω-ультрарозподілів типу Берлінга і типу Рум'є з довільними носіями і описано узагальнену операцію диференціювання та групу зсувів. Нижче для поліноміального аналога ω-ультрарозподілів типу Берлінга з компактними носіями описуємо операцію згортки і доводимо властивості алгебри таких поліноміальних ω-ультрарозподілів відносно згортки.

Нехай $E'_{(\omega)}$ – простір ω-ультрарозподілів типу Берлінга з компактними носіями на $\mathbb{R}$. Будуємо простір $P(E'_{(\omega)})$ неперервних поліномів на просторі $E'_{(\omega)}$, а також сильно спряжений до нього простір $P'(E'_{(\omega)})$. Елементи простору $P'(E'_{(\omega)})$ називаємо поліноміальними ω-ультрарозподілами типу Берлінга з компактними носіями. Простори $P(E'_{(\omega)})$ та $P'(E'_{(\omega)})$ мають з точністю до топологічного ізоморфізму тензорну структуру. Вводимо на цих просторах узагальнену операцію диференціювання та згортки. Описуємо властивості алгебри $P'(E'_{(\omega)})$ відносно згортки.

Попередні відомості і позначення. Нехай X, Y – локально опуклі комплексні векторні простори. Простір всіх лінійних неперервних операторів з X в Y позначимо $\mathcal{L}(X,Y)$ і наділимо його топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах у X. Для позначення композиції операторів в $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X,X)$ використовуватимемо символ $\circ$. Сильно спряжений простір до X позначатимемо X'. Дію функціонала $f \in X'$ на елемент $x \in X$ записуватимемо як $\langle f, x \rangle$.

Для n-го (симетричного) тензорного степеня простору X використовуватимемо позначення $\otimes^n X$ (відповідно $\otimes_s^n X$), $n \in \mathbb{N}$. За означенням приймемо $\otimes^0 X = \otimes_s^0 X := \mathbb{C}$. Поповнення тензорного добутку $\otimes$ (симетричного тензорного добутку $\otimes_s$) у проективній локально опуклій топології позначатимемо $\otimes_p$ (відповідно $\otimes_{s,p}$). Позначимо $x^{\otimes n} := \underbrace{x \otimes \ldots \otimes x}_{n} \in \otimes_{s,p}^n X$ і $x^{\otimes 0} = 1 \in \mathbb{C}$ для $x \in X$.

Символом $\bigtimes_{n \in \mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n X$ – декартовий локально опуклий добуток і символом $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n X$ – пряму локально опуклу суму симетричних тензорних степенів $\otimes^n_{s,p} X$ простору X; аналогічні позначення для простору X'. Приймемо, що елементи прямої суми містять лише скінченну кількість доданків.

Якщо X є ядерним (F) або (DF) локально опуклим простором (див. [3, 8]), то простори $\otimes^n_{s,p} X'$ і $(\otimes^n_{s,p} X)'$ – топологічно ізоморфні.

Поліноми на локально опуклих просторах. Для довільного $n \in \mathbb{N}$ простір всіх симетричних n-лінійних неперервних функціоналів позначимо $\mathcal{L}_s({}^n X, \mathbb{C})$.

Простір всіх неперервних n-однорідних поліномів позначимо $P_n(X)$ і наділимо його топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах в X. За означенням приймемо $P_0(X) := \mathbb{C}$. Для означення простору $P_n(X)$ можна використати лінійні топологічні ізоморфізми $P_n(X) \simeq \mathcal{L}_s({}^n X, \mathbb{C}) \simeq$ $\simeq (\otimes^n_{s,p} X)'$, описані раніше [6]. Простір всіх скінченних сум $P(X) = \left\{ \mathbf{P} = \sum\limits_{n=0}^{m} \mathbf{P}_n : \mathbf{P}_n \in P_n(X),\ m \in \mathbb{Z}_+ \right\}$, наділений топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах в X, називають *простором неперервних поліномів* на X.

Символами $P'(X)$, $P'_n(X)$ позначатимемо сильно спряжені простори до $P(X)$, $P_n(X)$ відповідно. Аналогічні простори поліномів $P(X')$, $P_n(X')$ і сильно спряжених до них просторів $P'(X')$, $P'_n(X')$ вважаємо визначеними для простору X'.

Простір $P(X)$ є топологічною алгеброю з одиницею і множенням $\mathbf{P}(x) \cdot \mathbf{Q}(x) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}_+} \sum\limits_{m=0}^{n} \mathbf{P}_m(x) \cdot \mathbf{Q}_{n-m}(x)$. Якщо X неперервно і щільно вкладається в X', то правильним є неперервне щільне вкладення $P(X') \hookrightarrow P'(X')$ (див. [10]). Тому множення алгебри $P(X')$ можна продовжити до множення в алгебрі $P'(X')$.

ω*-ультрарозподіли типу Берлінга.* Нехай $v(t) : [0, \infty) \to [0, \infty)$ – така неперервна зростальна функція, що $v|_{[0,1]} \equiv 0$. Функцію $\omega(t) := v(|t|)$ назвемо ваговою, якщо вона задовольняє такі умови (див. [5, 11]):

(α) існує таке $L \ge 1$, що $\omega(2t) \le L(1 + \omega(t))$ для всіх $t \ge 0$,

(β) $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{\omega(t)}{1+t^2}\, dt < \infty$,

(γ) $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{\ln(1+t)}{\omega(t)} = 0$,

(δ) функція $\eta : t \mapsto \omega(e^t) \in [0, \infty)$ є опуклою.

Нехай $\eta : [0, \infty) \to [0, \infty)$ є опуклою і зростальною, що задовольняє умови $\eta(0) = 0$ і $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{\eta(x)} = 0$. Спряжену за Юнгом до функції η визначимо як $\eta^* : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\eta^*(y) := \sup\limits_{x \ge 0}(xy - \eta(x))$. Функція η^* є опуклою і зростальною.

Для вагової функції ω і відкритої множини $\Omega \subset \mathbb{R}$ визначимо простір

$$E_{(\omega)}(\Omega) = \Big\{ \varphi \in C^\infty(\Omega) \mid \textit{для всіх компактних } K \in \Omega \textit{ і всіх } \lambda \in \mathbb{N}$$

$$p_{K,\lambda}(\varphi) := \sup_{\alpha\in\mathbb{Z}_+}\sup_{t\in K} |\varphi^{(\alpha)}(t)| \exp\left(-\lambda\eta^*\left(\frac{|\alpha|}{\lambda}\right)\right) < \infty\Bigg\}.$$

Простір $E_{(\omega)}(\Omega)$ наділяють метричною локально опуклою топологією, яку задають півнорми $p_{K,\lambda}$, де K – компактна підмножина Ω і $\lambda\in\mathbb{N}$. $E_{(\omega)} = E_{(\omega)}(\Omega)$ є ядерним простором Фреше [5].

Елементи простору $E_{(\omega)}(\mathbb{R})$ називають основними ω-ультрадиференційовними функціями типу Берлінга з довільними носіями. Сильно спряжений простір до $E_{(\omega)}(\mathbb{R})$ позначаємо $E'_{(\omega)}(\mathbb{R})$. Елементи простору $E'_{(\omega)} = E'_{(\omega)}(\mathbb{R})$ називатимемо згідно з працями [5, 11] ω-ультрарозподілами типу Берлінга з компактними носіями.

Поліноміальні ω-ультрарозподіли типу Берлінга з компактними носіями. Для $X = E'_{(\omega)}$ можна застосувати абстрактну теорію, розвинуту раніше [9, 10], і як наслідок отримати, що справджуються лінійні топологічні ізоморфізми: $P'(E'_{(\omega)}) \xrightarrow{\Psi} \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,p} E'_{(\omega)}$, $P(E'_{(\omega)}) \xrightarrow{\Upsilon} \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,p} E_{(\omega)}$. Елементи простору $P(E'_{(\omega)})$ (відповідно $P'(E'_{(\omega)})$) назвемо поліноміальними основними ω-ультрадиференційовними функціями (відповідно поліноміальними ω-ультрарозподілами) типу Берлінга. Надалі поліноміальні основні функції та поліноміальні ω-ультрарозподіли записуватимемо у вигляді $\mathbf{p} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} p_n := (p_0, p_1, p_2, \dots, p_m, 0, \dots)$ для деякого $m\in\mathbb{Z}_+$ та $\mathbf{f} = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n := (f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots)$ відповідно, де $p_n \in \otimes^n_{s,p} E_{(\omega)}$, $f_n \in \otimes^n_{s,p} E'_{(\omega)}$.

Справджується також, що пряма сума $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,p} E_{(\omega)}$ є локально опуклою алгеброю відносно операції $\mathbf{p}\star\mathbf{q} := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\left(\sum_{m=0}^{n} p_m \otimes_s q_{n-m}\right)$, де $\mathbf{p} := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} p_n$, $\mathbf{q} := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} q_n$; декартів добуток $\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,p} E'_{(\omega)}$ є локально опуклою алгеброю відносно операції $\mathbf{f}\star\mathbf{g} := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+}\left(\sum_{m=0}^{n} f_m \otimes_s g_{n-m}\right)$, де $\mathbf{f} := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n$, $\mathbf{g} := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} g_n$; відображення $\left\{\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,p} E_{(\omega)}, \star\right\} \to \left\{P(E'_{(\omega)}), \cdot\right\}$ та $\left\{\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,p} E'_{(\omega)}, \star\right\} \to \left\{P'(E'_{(\omega)}), \cdot\right\}$ є ізоморфізмами відповідних алгебр.

Диференціювання на просторі поліноміальних ω-ультрарозподілів. Система функцій

$$\varphi^{\otimes n} : (t_1, \dots, t_n) \mapsto \varphi(t_1)\cdot\ldots\cdot\varphi(t_n), \tag{1}$$

де $\varphi\in E_{(\omega)}$, $n\in\mathbb{N}$, є тотальною підмножиною у просторі $\otimes^n_{s,p} E_{(\omega)}$. Кожен елемент простору $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,p} E_{(\omega)}$ можна апроксимувати лінійною комбінацією елементів вигляду (1), тобто $\left\{\boldsymbol{\varphi}^{\otimes}_m = (1, \varphi, \varphi^{\otimes 2}, \dots, \varphi^{\otimes m}, 0, \dots) : \varphi\in E_{(\omega)},\ m\in\mathbb{Z}_+\right\}$ є тотальною підмножиною в $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,p} E_{(\omega)}$. Анологічно система

$$\left\{\mathbf{f}^{\otimes} := (1, f, \dots, f^{\otimes n}, \dots) : f\in E'_{(\omega)}\right\} \tag{2}$$

є тотальною підмножиною простору $\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,p} E'_{(\omega)}$.

Якщо $\mathbf{p} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} p_n \in \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E_{(\omega)}$, то відповідний поліном з простору $P(E'_{(\omega)})$ має форму $\mathsf{P} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}^{fin} \left\langle \cdot^{\otimes n}, p_n \right\rangle$. Символ $\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}^{fin}$ означає, що сума є скінченною, але не фіксована кількість доданків. Зокрема, для $\boldsymbol{\varphi}_m^{\otimes} = (1, \varphi, \varphi^{\otimes 2}, \ldots, \varphi^{\otimes m}, 0, \ldots) \in \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E_{(\omega)}$, $\varphi \in E_{(\omega)}$, $m \in \mathbb{Z}_+$ маємо

$$\mathsf{P}_{\varphi,m} := \sum_{n=0}^{m} \left\langle \cdot^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \right\rangle.$$

Нехай $\mathbf{D}$ – оператор диференціювання на просторі $E_{(\omega)}$. $\mathbf{D} \in \mathcal{L}\left(E_{(\omega)}\right)$ (див. твердження 6.3 [5]). Узагальнимо оператор $\mathbf{D}$ на простір поліномів $P(E'_{(\omega)})$. Визначимо оператор ∂ на елементах тотальної підмножини за правилом:

$$\partial\boldsymbol{\varphi}_m^{\otimes} := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \partial_n \varphi^{\otimes n},\ \boldsymbol{\varphi}_m^{\otimes} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E_{(\omega)},\ \ \varphi^{\otimes n} \in \otimes_{s,p}^n E_{(\omega)},\ \ \varphi \in E_{(\omega)},$$

де $\partial_0[\varphi^{\otimes 0}] = 0$, $\partial_n[\varphi^{\otimes n}] = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\varphi \otimes \ldots \otimes \varphi \otimes \mathbf{D}(\varphi)}_{j} \underbrace{\otimes \varphi \otimes \ldots \otimes \varphi}_{n-j}$. Розширимо цей оператор за лінійністю і неперервністю на весь простір $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E_{(\omega)}$. Оператор ∂ є неперервним диференціюванням на алгебрі $\left\{ \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E_{(\omega)}, \star \right\}$ (для доведення цього факту можна міркувати аналогічно, як у доведенні теореми 3 [1]).

Визначимо таку операцію: $\Gamma(\partial) := \Upsilon^{-1} \circ \partial \circ \Upsilon$. З того, що Υ і Υ^{-1} є гомоморфізмами слідує, що $\Gamma(\partial)$ є диференціюванням на просторі $P(E'_{(\omega)})$. Оператор $\Gamma(\partial)$ діє так:

$$\begin{aligned}\Gamma(\partial)\mathbf{P}_{\varphi,m} &:= \sum_{n=1}^{m} n \left\langle \cdot, \mathbf{D}(\varphi) \right\rangle \left\langle \cdot, \varphi \right\rangle^{n-1} = \left\langle \cdot, \mathbf{D}(\varphi) \right\rangle \sum_{n=1}^{m} n \left\langle \cdot^{\otimes(n-1)}, \varphi^{\otimes(n-1)} \right\rangle = \\ &= \left\langle \cdot, \mathbf{D}(\varphi) \right\rangle + 2\left\langle \cdot, \mathbf{D}(\varphi) \right\rangle \left\langle \cdot, \varphi \right\rangle + \cdots + m \left\langle \cdot, \mathbf{D}(\varphi) \right\rangle \left\langle \cdot, \varphi \right\rangle^{m-1}, \end{aligned} \tag{3}$$

де $\mathbf{P}_{\varphi,m} := \sum_{n=1}^{m} \left\langle \cdot^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \right\rangle = 1 + \left\langle \cdot, \varphi \right\rangle + \left\langle \cdot, \varphi \right\rangle^2 + \cdots + \left\langle \cdot, \varphi \right\rangle^m$, $\left\langle \cdot^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \right\rangle = \left\langle \cdot, \varphi \right\rangle^n$ – n-однорідний поліном над $E'_{(\omega)}$. Правильність (3) випливає з визначення ∂ і $\Gamma(\partial)$.

Нехай $\mathbf{D}'$ – оператор диференціювання на просторі $E'_{(\omega)}$. Узагальнимо оператор $\mathbf{D}' \in \mathcal{L}\left(E'_{(\omega)}\right)$ на простір $P'(E'_{(\omega)})$. Визначимо оператор ∂', що на довільний елемент вигляду $\mathbf{f}^{\otimes} := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} f^{\otimes n}$, де $f^{\otimes n} \in \otimes_{s,p}^n E'_{(\omega)}$, $f \in E'_{(\omega)}$, діє за правилом

$$\partial'\mathbf{f}^{\otimes} = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \partial'_n[f^{\otimes n}],\ \text{де}\ \partial'_0[f^{\otimes 0}] = 0,\ \ \partial'_n[f^{\otimes n}] = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{f \otimes \ldots \otimes f \otimes \mathbf{D}'(f)}_{j} \underbrace{\otimes f \otimes \ldots \otimes f}_{n-j}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$. Розширимо цей оператор за лінійністю і неперервністю на весь простір $\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E'_{(\omega)}$. Оператор ∂' є неперервним диференціюванням на алгебрі $\left\{ \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E'_{(\omega)}, \star \right\}$ (для доведення цього факту можна міркувати аналогічно, як у доведенні теореми 4 [1]).

Визначимо оператор диференціювання $\Gamma(\partial')$ на просторі $P'(E'_{(\omega)})$ так:

$$\Gamma(\partial') := \Psi^{-1} \circ \partial' \circ \Psi .$$

Якщо $\mathbf{f} = (f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots) \in \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E'_{(\omega)}$, тоді відповідний елемент з $P'(E'_{(\omega)})$ має вигляд $\mathbf{F} = \left(f_0, \langle f_1, \cdot\rangle, \left\langle f_2, \cdot^{\otimes 2}\right\rangle, \ldots, \left\langle f_n, \cdot^{\otimes n}\right\rangle, \ldots\right)$. Зокрема, для елемента $\mathbf{f}^{\otimes} := (1, f, f^{\otimes 2}, \ldots, f^{\otimes n}, \ldots) \in \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E'_{(\omega)}$, $f \in E'_{(\omega)}$, маємо подання $\mathbf{F}^{\otimes} := \left(1, \langle f, \cdot\rangle, \left\langle f^{\otimes 2}, \cdot^{\otimes 2}\right\rangle, \ldots, \left\langle f^{\otimes n}, \cdot^{\otimes n}\right\rangle, \ldots\right) \in P'(E'_{(\omega)})$. Оператор диференціювання $\Gamma(\partial')$ діє так: $\Gamma(\partial')\mathbf{F}^{\otimes} := \left(1, \langle f', \cdot\rangle, 2\langle f', \cdot\rangle\langle f, \cdot\rangle, \ldots, n\langle f', \cdot\rangle\langle f, \cdot\rangle^{n-1}, \ldots\right)$.

Згортка на просторі поліноміальних ω-ультрарозподілів. Розглянемо однопараметричну C_0-групу зсувів $T : \mathbb{R} \ni s \mapsto T_s \in \mathcal{L}(E_{(\omega)})$, $T_s\varphi(t) = \varphi(t-s)$, $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in E_{(\omega)}$. Нехай T'_s – спряжений оператор до T_s відносно дуальної пари $\left\langle E'_{(\omega)}, E_{(\omega)}\right\rangle$. Визначимо сім'ю операторів зсуву $\{\Gamma(T_s) : s \in \mathbb{R}\}$ на просторі $P(E'_{(\omega)})$:

$$\Gamma(T_s) : P(E'_{(\omega)}) \ni \mathbf{P} \mapsto \mathbf{P} \circ T'_s \in P(E'_{(\omega)}),\ s \in \mathbb{R} .$$

Для довільного $K \in \mathcal{L}(E_{(\omega)})$ визначимо оператор $K^{\otimes} \in \mathcal{L}\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E_{(\omega)}\right)$:

$$K^{\otimes} := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} K^{\otimes n} : \mathbf{p} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} p_n \mapsto K^{\otimes} p := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} K^{\otimes n} p_n, \tag{4}$$

де $K^{\otimes 0}$ – оператор множення на $1 \in \mathbb{C}$ і кожен оператор $K^{\otimes n} \in \mathcal{L}\left(\otimes_{s,p}^n E_{(\omega)}\right)$ є лінійним і неперервним розширенням відображення $\varphi_1 \otimes_s \cdots \otimes {}_s\varphi_n \mapsto K\varphi_1 \otimes_s \cdots \otimes {}_s K\varphi_n$, де $\varphi_i \in E_{(\omega)}$, $i = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$. Зокрема, коректно означеним є відображення $T^{\otimes n} : \mathbb{R} \ni s \mapsto T_s^{\otimes n} \in \mathcal{L}\left(\otimes_{s,p}^n E_{(\omega)}\right)$. Неважко перевірити, що $T^{\otimes n}$ є однопараметричною групою операторів. Позначимо $T_s^{\otimes} := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} T_s^{\otimes n}$, $s \in \mathbb{R}$. Для полінома $\mathbf{P}_{\varphi,m} = \sum_{n=0}^{m} \left\langle \cdot^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n}\right\rangle$ і $f \in E'_{(\omega)}$ маємо:

$$\Gamma(T_s)\mathbf{P}_{\varphi,m}(f) = \mathbf{P}_{\varphi,m}(T'_s f) = \sum_{n=0}^{m} \left\langle (T'_s f)^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n}\right\rangle = \sum_{n=0}^{m} \langle T'_s f, \varphi\rangle^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \langle f, T_s\varphi\rangle^n = \sum_{n=0}^{m} \left\langle f^{\otimes n}, (T_s\varphi)^{\otimes n}\right\rangle = \sum_{n=0}^{m} \left\langle f^{\otimes n}, T_s^{\otimes n}\varphi^{\otimes n}\right\rangle, \tag{5}$$

для $s \in \mathbb{R}$. З означення операторів $\Gamma(T_s)$ і $T_s^{\otimes}$ діаграма

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E_{(\omega)} & \overset{T_s^{\otimes}}{\rightarrow} & \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E_{(\omega)} \\ \Upsilon \uparrow\downarrow \Upsilon^{-1} & & \Upsilon \uparrow\downarrow \Upsilon^{-1} \\ P(E'_{(\omega)}) & \overset{\Gamma(T_s)}{\rightarrow} & P(E'_{(\omega)}) \end{array}$$

є комутативна і множина $\Gamma(T) := \{\Gamma(T_s),\ s \in \mathbb{R}\}$ є групою операторів. Отже, для довільних $s \in \mathbb{R}$ оператор $\Gamma(T_s)$ можна визначити у формі: $\Gamma(T_s) := \Upsilon^{-1} \circ T_s^{\otimes} \circ \Upsilon$.

Для ω-ультрарозподілу $f \in E'_{(\omega)}$ та функції $\varphi \in E_{(\omega)}$ визначимо згортку $f \star \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $(f \star \varphi)(s) := \langle f_s, \varphi(t-s)\rangle = \langle f_s, T_s\varphi(t)\rangle$, де f_s позначає дію функціонала f за змінною s. Відомо, що $f \star \varphi \in E_{(\omega)}$ (твердження 6.3 [5]). Для $f, g \in E'_{(\omega)}$ визначимо згортку $\langle f * g, \varphi\rangle := \langle f, \breve{g} \star \varphi\rangle$, $\varphi \in E_{(\omega)}$, де $\langle \breve{g}, \varphi\rangle = \langle g_t, \varphi(-t)\rangle$, яка володіє властивістю

$$(f * g) \star \varphi = f \star (g \star \varphi) \tag{6}$$

для довільних $f, g \in E'_{(\omega)}$, $\varphi \in E_{(\omega)}$. Оператор згортки $K_f : \varphi \mapsto f \star \varphi$ належить до $\mathcal{L}(E_{(\omega)})$ для довільних $f \in E'_{(\omega)}$.

З (4) випливає: $K_{\mathbf{f}}^{\otimes} := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} K_{f_n}^{\otimes n} \in \mathcal{L}\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E_{(\omega)}\right)$ і $K_{f_n}^{\otimes n} \in \mathcal{L}\left(\otimes_{s,p}^n E_{(\omega)}\right)$, де $\mathbf{f} = (f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots) \in \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E'_{(\omega)}$, $f_n \in \otimes_{s,p}^n E'_{(\omega)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Визначимо згортку $\mathbf{f} \star \mathbf{p} := K_{\mathbf{f}}^{\otimes}\mathbf{p}$, де $\mathbf{f} \in \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E'_{(\omega)}$ і $\mathbf{p} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E_{(\omega)}$.

Згортку поліноміального ω-ультрарозподілу $\mathbf{F} \in P'(E'_{(\omega)})$ і полінома $\mathbf{P} \in P(E'_{(\omega)})$ визначимо так:

$$\mathbf{F} \star \mathbf{P} := \Gamma(K_{\mathbf{f}}^{\otimes})\mathbf{P},$$

де $\Gamma(K_{\mathbf{f}}^{\otimes}) := \Upsilon^{-1} \circ K_{\mathbf{f}}^{\otimes} \circ \Upsilon \in \mathcal{L}(P(E'_{(\omega)}))$ і $\mathbf{f} = \Psi\mathbf{F} \in \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E'_{(\omega)}$.

Твердження 1. Для всіх $\mathbf{f} \in \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E'_{(\omega)}$ і $\mathbf{p} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E_{(\omega)}$ згортка $\mathbf{f} \star \mathbf{p}$ належить до простору $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E_{(\omega)}$.

Д о в е д е н н я. Нехай $\mathbf{f} = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n$ і $\mathbf{p} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} p_n$. З того, що $\mathbf{f} \star \mathbf{p} := K_{\mathbf{f}}^{\otimes}\mathbf{p} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} K_{f_n}^{\otimes n} p_n$, достатньо довести, що $K_{f_n}^{\otimes n} p_n \in \otimes_{s,p}^n E_{(\omega)}$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. Якщо $n = 0$, це очевидно. Якщо $n = 1$, отримуємо $\langle f_1, T_s p_1\rangle = (f_1 \star p_1)(s)$ і належить до простору $E_{(\omega)}$, як зазначено вище. Розглянемо випадок $n > 1$. Припустимо, що $f_n = f^{\otimes n}$ і $p_n = \varphi^{\otimes n}$, де $f \in E'_{(\omega)}$, $\varphi \in E_{(\omega)}$. Тоді функція

$$K_{f_n}^{\otimes n} p_n = \left\langle f^{\otimes n}, T_s^{\otimes n}\varphi^{\otimes n}\right\rangle = \left\langle f^{\otimes n}, (T_s\varphi)^{\otimes n}\right\rangle = \langle f, T_s\varphi\rangle^{\otimes n} = (f \star \varphi)^{\otimes n}$$

належить до простору $\otimes_{s,p}^n E_{(\omega)}$ як n-й тензорний степінь функції з простору $E_{(\omega)}$. ◊

Наслідок. Для всіх $\mathbf{F} \in P'(E'_{(\omega)})$ і $\mathbf{P} \in P(E'_{(\omega)})$ згортка $\mathbf{F} \star \mathbf{P} \in P(E'_{(\omega)})$.

Визначимо операцію

$$\mathbf{f}^{\otimes} \,\tilde{*}\, \mathbf{g}^{\otimes} = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} (f * g)^{\otimes n}$$

для довільних елементів з тотальної множини (2) простору $\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E'_{(\omega)}$ і розширимо цю операцію за лінійністю і неперервністю на цілий простір $\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E'_{(\omega)}$.

На просторі $P'(E'_{(\omega)})$ поліноміальних ω-ультрарозподілів визначимо операцію

$$\mathbf{F} \,\tilde{*}\, \mathbf{G} := \Psi^{-1}(\mathbf{f} \,\tilde{*}\, \mathbf{g}),$$

де $\Psi : P'(E'_{(\omega)}) \ni \mathbf{F} \mapsto \mathbf{f} \in \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,p} E'_{(\omega)}$ і $\Psi : P'(E'_{(\omega)}) \ni \mathbf{G} \mapsto \mathbf{g} \in \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,p} E'_{(\omega)}$. Очевидно, що простір $P'(E'_{(\omega)})$ є алгеброю відносно операції $\tilde{*}$.

Комутант $[\Gamma(T)]^c \subset \mathcal{L}\big(P(E'_{(\omega)})\big)$ групи $[\Gamma(T)]$ – це множина

$$[\Gamma(T)]^c := \Big\{\Gamma(K) : \Gamma(K) \circ \Gamma(T_s) = \Gamma(T_s) \circ \Gamma(K),\ K \in \mathcal{L}\big(E_{(\omega)}\big)\ \forall s \in \mathbb{R}\Big\},$$

де $\Gamma(K) := \Upsilon^{-1} \circ K^{\otimes} \circ \Upsilon \subset \mathcal{L}\big(P(E'_{(\omega)})\big)$ і $K^{\otimes} \in \mathcal{L}\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,p} E_{(\omega)}\right)$ є визначеними як у (4).

Теорема 1. Відображення

$$P'(E'_{(\omega)}) \ni \mathbf{F} \mapsto \mathbf{F}\star \in \mathcal{L}\big(P(E'_{(\omega)})\big), \tag{7}$$

де $\mathbf{F}\star : \mathbf{P} \mapsto \mathbf{F} \star \mathbf{P}$ – алгебричний ізоморфізм з алгебри $\big\{P'(E'_{(\omega)}), \tilde{*}\big\}$ на комутант $[\Gamma(T)]^c$ групи $[\Gamma(T)]$ в алгебрі $\big\{\mathcal{L}\big(P(E'_{(\omega)})\big), \circ\big\}$. Зокрема, співвідношення

$$(\mathbf{F} \,\tilde{*}\, \mathbf{G}) \star \mathbf{P} = \mathbf{F} \star (\mathbf{G} \star \mathbf{P}) \tag{8}$$

справедливе для всіх $\mathbf{F}, \mathbf{G} \in P'(E'_{(\omega)})$ і $\mathbf{P} \in P(E'_{(\omega)})$.

Доведення. Не звужуючи загальності, вважаємо, що $\Psi : \mathbf{F} \mapsto \mathbf{f}^{\otimes} = (1, f, f^{\otimes 2}, \ldots, f^{\otimes n}, \ldots)$, $\Psi : \mathbf{G} \mapsto \mathbf{g}^{\otimes} = (1, g, g^{\otimes 2}, \ldots, g^{\otimes n}, \ldots)$, $f, g \in E'_{(\omega)}$ і $\Upsilon : \mathbf{P} \mapsto \boldsymbol{\varphi}^{\otimes}_m = (1, \varphi, \varphi^{\otimes 2}, \ldots, \varphi^{\otimes m}, 0, \ldots)$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $\varphi \in E_{(\omega)}$.

Доведемо рівність $(\mathbf{f}^{\otimes} \,\tilde{*}\, \mathbf{g}^{\otimes}) \star \boldsymbol{\varphi}^{\otimes}_m = \mathbf{f}^{\otimes} \star (\mathbf{g}^{\otimes} \star \boldsymbol{\varphi}^{\otimes}_m)$. З означення операцій $\tilde{*}$ і $\star$ також з (6) отримуємо:

$$(\mathbf{f}^{\otimes} \,\tilde{*}\, \mathbf{g}^{\otimes}) \star \varphi^{\otimes}_m = \bigoplus_{n=0}^{m} \Big\langle (f * g)^{\otimes n}, T_s^{\otimes n} \varphi^{\otimes n} \Big\rangle = \bigoplus_{n=0}^{m} \big\langle (f * g), T_s\varphi \big\rangle^{\otimes n} = \bigoplus_{n=0}^{m} \big\langle (f * g) \star \varphi \big\rangle^{\otimes n} =$$

$$= \bigoplus_{n=0}^{m} \big\langle (f \star (g \star \varphi) \big\rangle^{\otimes n} = \bigoplus_{n=0}^{m} \big\langle f, T_s(g \star \varphi) \big\rangle^{\otimes n} = \bigoplus_{n=0}^{m} \Big\langle f^{\otimes n}, T_s^{\otimes n}(g \star \varphi)^{\otimes n} \Big\rangle = \mathbf{f}^{\otimes} \star (\mathbf{g}^{\otimes} \star \varphi^{\otimes}_m).$$

Звідси випливає, що оператор $K^{\otimes}_{\mathbf{f}} : \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,p} E'_{(\omega)} \ni \mathbf{p} \mapsto \mathbf{f} \star \mathbf{p} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,p} E'_{(\omega)}$ володіє властивістю $K_{\mathbf{f}\tilde{*}\mathbf{g}} = K_{\mathbf{f}} \circ K_{\mathbf{g}}$ для всіх $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,p} E_{(\omega)}$. Використовуючи ізоморфізми Υ та Ψ, отримуємо, що рівність (8) доведено і відображення (7) є алгебричним гомоморфізмом.

Припускали, що $\Psi : \mathbf{F} \mapsto \mathbf{f}^{\otimes}$ і $\Upsilon : \mathbf{P} \mapsto \boldsymbol{\varphi}^{\otimes}_m$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Тому поліноміальний ω-ультрарозподіл $\mathbf{F} \in P'(E'_{(\omega)})$ і поліном $\mathbf{P}$ можемо записати у формі $\mathbf{F} = \Big(1, \langle f, \cdot\rangle, \Big\langle f^{\otimes 2}, \cdot^{\otimes 2}\Big\rangle, \ldots, \Big\langle f^{\otimes n}, \cdot^{\otimes n}\Big\rangle, \ldots\Big)$ і $\mathbf{P} = \sum_{n=0}^{m} \Big\langle \cdot^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n}\Big\rangle$ відповідно. Тут $\Big\langle f^{\otimes n}, \cdot^{\otimes n}\Big\rangle$ (відповідно $\Big\langle \cdot^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n}\Big\rangle$) – n-однорідні поліноми над $E_{(\omega)}$ (відповідно $E'_{(\omega)}$). У цьому випадку згортка має вигляд $\mathbf{F} \star \mathbf{P} = \sum_{n=0}^{m} \Big\langle \cdot^{\otimes n}, (f \star \varphi)^{\otimes n}\Big\rangle$. Тому, використовуючи формулу (5), отримаємо

$$F \star \Gamma(T_s)\mathbf{P} = \sum_{n=0}^{m} \Big\langle \cdot^{\otimes n}, (f \star T_s\varphi)^{\otimes n} \Big\rangle = \sum_{n=0}^{m} \Big\langle \cdot^{\otimes n}, (T_s(f \star \varphi))^{\otimes n} \Big\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{m}\left\langle \cdot^{\otimes n}, T_s^{\otimes n}(f\star\varphi)^{\otimes n}\right\rangle = \Gamma(T_s)\left[\sum_{n=0}^{m}\left\langle \cdot^{\otimes n},(f\star\varphi)^{\otimes n}\right\rangle\right] = \Gamma(T_s)[\mathbf{F}\star\mathbf{P}]$$

для всіх $s\in\mathbb{R}$. Звідси випливає, що оператор $\mathbf{F}\star$ належить до $[\Gamma(T_s)]^c$ для всіх $\mathbf{F}\in P'(E'_{(\omega)})$.

Навпаки, нехай $K\in\mathcal{L}\left(E_{(\omega)}\right)$ такий оператор, що $\Gamma(K)\in[\Gamma(T_s)]^c$. Покажемо, що існує такий елемент $\mathbf{H}\in P'(E'_{(\omega)})$, що $\Gamma(K)=\mathbf{H}\star$. Елемент $\mathbf{H}:=\Psi^{-1}[\mathbf{h}]$, де $\mathbf{h}:=(1,h,\ldots,h^{\otimes n},\ldots)\in \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes_{s,p}^n E'_{(\omega)}$ і $h\in E'_{(\omega)}$, визначимо так: $\langle h,\varphi\rangle=(K\varphi)(0)$, $\varphi\in E_{(\omega)}$. Звідси $(h\star\varphi)(s)=\langle h,T_s\varphi\rangle=(KT_s\varphi)(0)=(K\varphi)(s)$ і отримуємо:

$$\mathbf{h}\star\boldsymbol{\varphi}_m^{\otimes}=\bigoplus_{n=0}^{m}(h\star\varphi)^{\otimes n}=\bigoplus_{n=0}^{m}(K\varphi)^{\otimes n}=\bigoplus_{n=0}^{m}K^{\otimes n}\varphi^{\otimes n}=K^{\otimes}\boldsymbol{\varphi}_m^{\otimes}.$$

Отже, $K^{\otimes}=K_{\mathbf{h}}^{\otimes}$ і $\Gamma(K)=\mathbf{H}\star$, а тому, образ відображення (7) співпадає з комутантом $[\Gamma(T_s)]^c$. ◊

Твердження 2. Для довільного $\mathbf{f}\in\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes_{s,p}^n E'_{(\omega)}$ і $\mathbf{p}\in\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes_{s,p}^n E_{(\omega)}$ справедлива рівність

$$\partial'\mathbf{f}\star\mathbf{p}=-\mathbf{f}\star\partial\mathbf{p}. \tag{9}$$

Д о в е д е н н я. Елементи $\mathbf{f}^{\otimes}$ і $\boldsymbol{\varphi}_m^{\otimes}$ належать до тотальної підмножини просторів $\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes_{s,p}^n E'_{(\omega)}$ і $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes_{s,p}^n E_{(\omega)}$ відповідно, тому достатньо довести рівність (9) для цих елементів:

$$\partial'\mathbf{f}^{\otimes}\star\boldsymbol{\varphi}_m^{\otimes}=(0,\mathbf{D}'(f)\star\varphi,(\mathbf{D}'(f)\star\varphi)\otimes(f\star\varphi)+(f\star\varphi)\otimes(\mathbf{D}'(f)\star\varphi),\ldots$$

$$\sum_{j=1}^{m}\underbrace{(f\star\varphi)\otimes\ldots\otimes(f\star\varphi)\otimes(\mathbf{D}'(f)\star\varphi)}_{j}\otimes\underbrace{(f\star\varphi)\otimes\ldots\otimes(f\star\varphi)}_{m-j},0,\ldots)=$$

$$=-\ (0,f\star\mathbf{D}(\varphi),\left\langle f^{\otimes 2},(T_s\mathbf{D}(\varphi))\otimes(T_s\varphi)+(T_s\varphi)\otimes(T_s\mathbf{D}(\varphi))\right\rangle,\ldots$$

$$\left\langle\ f^{\otimes m},\sum_{j=1}^{m}\underbrace{(T_s\varphi)\otimes\ldots\otimes(T_s\varphi)\otimes(T_s\mathbf{D}(\varphi))}_{j}\otimes\underbrace{(T_s\varphi)\otimes\ldots\otimes(T_s\varphi)}_{m-j}\ \right\rangle,0,\ldots)=$$

$$=-\ (0,f\star\mathbf{D}(\varphi),\left\langle f^{\otimes 2},T_s^{\otimes 2}(\mathbf{D}(\varphi)\otimes\varphi+\varphi\otimes\mathbf{D}(\varphi))\right\rangle,\ldots$$

$$\left\langle\ f^{\otimes m},T_s^{\otimes m}\sum_{j=1}^{m}\underbrace{\varphi\otimes\ldots\otimes\varphi\otimes\mathbf{D}(\varphi)}_{j}\otimes\underbrace{\varphi\otimes\ldots\otimes\varphi}_{m-j}\ \right\rangle,0,\ldots)=$$

$$=-\ (0,f\star\mathbf{D}(\varphi),f^{\otimes 2}\star\partial_2\varphi^{\otimes 2},\ldots,f^{\otimes m}\star\partial_m\varphi^{\otimes m},0,\ldots)=-\ \mathbf{f}^{\otimes}\star\partial\boldsymbol{\varphi}_m^{\otimes}.\qquad ◊$$

Твердження 3. Для довільних $\mathbf{F}\in P'(E'_{(\omega)})$ і $\mathbf{P}\in P(E'_{(\omega)})$ справедлива рівність

$$\Gamma(\partial')\mathbf{F}\star\mathbf{P}=-\ \mathbf{F}\star\Gamma(\partial)\mathbf{P}. \tag{10}$$

Д о в е д е н н я. Як і вище, досить довести рівність (10) для елементів з тотальної підмножини, тобто

$$\Gamma(\partial')\mathbf{F}\star\mathbf{P}=\sum_{n=1}^{m}n\left\langle\cdot^{\otimes n},(\mathbf{D}'(f)\star\varphi)\otimes(f\star\varphi)^{\otimes(n-1)}\right\rangle=$$

$$=-\sum_{n=1}^{m}n\left\langle\cdot^{\otimes n},(f\star\mathbf{D}(\varphi))\otimes(f\star\varphi)^{\otimes(n-1)}\right\rangle=-\ \mathbf{F}\star\Gamma(\partial)\mathbf{P}.$$

Отже, твердження доведено. ◊

1. *Лозинська В. Я., Шарин С. В.* Поліноміальні ω-ультрарозподіли типу Берлінга і типу Рум'є // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2013. – Вип. 11. – С. 12–20.
2. *Шарин С. В.* Поліноміальні повільно зростаючі узагальнені функції // Карпатські мат. публікації. – 2010. – **2**, № 2. – С. 123–132.
3. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1971. – 360 с.
4. *Borchers H.* Algebras of unbounded operators in quantum fields theory // Physica – 1988. – **124**A. – P. 127–144.
5. *Braun R. W., Meise R., Taylor B. A.* Ultradifferentiable functions and Fourier analysis // Results in Math. – 1990. – **17**. – P. 206–237.
6. *Dineen S.* Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces. – New York: Springer-Verlag, 1999. – 543 p.
7. *Grasela K.* Generalized derivations and Fourier transform of polynomial ultradistributions // Mat. Stud. – 2003. – **20**, № 2. – P. 167–178.
8. *Komatsu H.* An Introduction to the Theory of Generalized Functions. – Tokyo University Publ., 2000. – 185 p.
9. *Lopushansky O.* Polynomial ultradistributions: differentiation and Laplace transformation // Banach Center Publ. IM PAN. – 2010. – **88.** – P. 195–209.
10. *Lopushansky O., Sharyn S.* Polynomial ultradistributions on $\mathbb{R}_+^d$ // Topology. – 2009. – **48.** – P. 80–90.
11. *Meise R., Taylor B. A.* Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Beurling type // Ark. Mat. – 1988. – **26.** – P. 265–287.

О СВЕРТКЕ В АЛГЕБРЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ω-УЛЬТРАРАСПРЕДЕЛЕНИЙ ТИПА БЕРЛИНГА С КОМПАКТНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ

Для полиномиального аналога ω-ультрараспределений типа Берлинга с компактными носителями описаны свертка и обобщенная операция дифференцирования. Доказано, что пространство таких полиномиальных ω-ультрараспределений является алгеброй относительно введенной операции свертки. Приведены свойства этой алгебры.

ON CONVOLUTION IN ALGEBRA OF POLYNOMIAL ω-ULTRADISTRIBUTIONS OF BEURLING TYPE WITH COMPACT SUPPORTS

Generalized operation of differentiation as well as a convolution in the space of polynomial ω-ultradistributions of Beurling type with compact supports are considered. It is proved that the space of such polynomial ω-ultradistributions is an algebra with respect to the introduced convolution operation. The properties of this algebra are described.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
15.09.15