УДК 512.64

В. Р. Зеліско, М. І. Кучма

ПРО ІСНУВАННЯ ЄДИНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ НАД КІЛЬЦЯМИ З ІНВОЛЮЦІЯМИ

Знайдено умови існування єдиних розв'язків лінійних матричних рівнянь типу Сильвестра над кільцями комплексних многочленів та квазімногочленів із симплектичною та мішаною інволюціями.

Розвинуто дослідження питання про єдиність розв'язків лінійних матричних рівнянь над кільцями многочленів та квазімногочленів з інволюцією, які започатковані в працях [1, 3].

Нехай K − кільце многочленів $C[x]$ із визначеними у ньому інволюціями [8]

$$(\alpha) \qquad \left(\sum_{i=-l}^{p} a_i x^i\right)^{\nabla} = \sum_{i=-l}^{p} \bar{a}_i x^{-i},$$

$$(\beta) \qquad \left(\sum_{i=-l}^{p} a_i x^i\right)^{\nabla} = \sum_{i=-l}^{p} \bar{a}_i (-x)^{-i},$$

$$(\gamma) \qquad \left(\sum_{i=-l}^{p} a_i x^i\right)^{\nabla} = \sum_{i=-l}^{p} a_i (-x)^{-i}$$

чи кільце квазімногочленів

$$C[x, x^{-1}] = \{f(x) = \sum_{i=-l}^{p} a_i x^i,\ a_i \in C\}$$

із введеною інволюцією ∇ одним із таких можливих способів [8]:

$$(\delta) \qquad \left(\sum_{i=-l}^{p} a_i x^i\right)^{\nabla} = \sum_{i=-l}^{p} \bar{a}_i x^{-i},$$

$$(\varepsilon) \qquad \left(\sum_{i=-l}^{p} a_i x^i\right)^{\nabla} = \sum_{i=-l}^{p} \bar{a}_i (-x)^{-i},$$

$$(\varsigma) \qquad \left(\sum_{i=-l}^{p} a_i x^i\right)^{\nabla} = \sum_{i=-l}^{p} a_i (-x)^{-i}.$$

На кільце матриць $M_n(K)$ інволюцію ∇ перенесемо так:

$$A(x)^{\nabla} = \left\| a_{ij}(x) \right\|^{\nabla} = \left\| a_{ji}(x)^{\nabla} \right\|. \tag{1}$$

У працях [1, 3] знайдені необхідні і достатні умови існування єдиного розв'язку лінійного матричного рівняння

$$A(x)X(x) - Y(x)A(x)^{\nabla} = C(x), \tag{2}$$

в якому матриці $A(x)$ і $C(x)$ взяті відповідно над кільцями многочленів та квазімногочленів із визначеними вище інволюціями.

Водночас існують інші типи інволюцій у кільцях матриць [2, 4, 10], зокрема, в кільці $M_{2n}(K)$ вивчали симплектичну інволюцію *, введену для матриці A, зображеної у вигляді $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, де $A_i \in M_{2^{n-1}}(K)$, рівністю

$$A^* = \begin{pmatrix} A_4^* & -A_2^* \\ -A_3^* & A_1^* \end{pmatrix}, \tag{3}$$

а в кільці матриць $M_{2n}(K)$ − інволюцію мішаного типу #:

$$A^{\#} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}^{\#} = \begin{pmatrix} A_4^{\nabla} & -A_2^{\nabla} \\ -A_3^{\nabla} & A_1^{\nabla} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

де матриці A_i^{∇} визначені умовою (1), [2, 4].

Розглянемо лінійні матричні рівняння, коефіцієнтами яких є матриці із відповідних кілець над K з такими інволюціями:

$$A(x)X(x) - Y(x)A(x)^* = C(x) \tag{5}$$

та

$$A(x)X(x) - Y(x)A(x)^{\#} = C(x). \tag{6}$$

Теорема 1. *Лінійне матричне рівняння (5), в якому* $A(x)$ *– унітальна матриця ненульового степеня із кільця* $M_{2n}(K)$*, за жодної матриці* $C(x) \in M_{2n}(K)$ *єдиного розв'язку не має.*

Д о в е д е н н я. Розглянемо спочатку випадок, коли в рівнянні (5) $A(x)$ та $C(x)$ матриці із $M_{2n}(C[x])$, причому $A(x)$ без обмеження загальності можна вважати унітальною [6]. Тоді $A(x)^*$, як легко бачити із рівності (3), також буде унітальною і до рівняння (5) можна застосувати леми 7.1 та 7.2 із праці [9], згідно з якими воно має єдиний розв'язок $X(x)$, $Y(x)$, $\deg X(x) < \deg A(x)^*$ за довільної матриці $C(x)$ тоді і тільки тоді, коли

$$(\det A(x), \det A(x)^*) = 1. \tag{7}$$

У праці [2] довели, що для довільної матриці $A \in M_{2n}(\mathrm{K})$, де K − комутативна область головних ідеалів, справедлива рівність

$$A^* = (J^{\otimes n})^T A^T J^{\otimes n},$$

де $J^{\otimes n} = \underbrace{J \otimes \ldots \otimes J}_{n}$ − прямий добуток n матриць вигляду $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Оскільки згідно зі [7] $\det J^{\otimes n} = 1$, то $\det A(x)^* = \det A(x)^T = \det A(x)$, а тому умова (7) не виконується, якщо $\deg A(x) > 0$.

Коли $A(x)$ і $C(x)$ квазімногочленні матриці, то як доведено раніше [3], шляхом домноження обидвох частин рівняння (5) на оборотну над $C[x, x^{-1}]$ матрицю Ex^l одержуємо рівняння (5) над $M_{2n}(C[x])$. Теорему доведено.

Зауваження. Рівняння (5) згідно з результатами праці [11] має розв'язок тоді і тільки тоді, коли матриці $\begin{pmatrix} A(x) & C(x) \\ O & A(x)^* \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} A(x) & O \\ O & A(x)^* \end{pmatrix}$ еквівалентні.

Для кожного з вказаних типів інволюцій ∇ у кільцях $C[x]$ та $C[x, x^{-1}]$ розглянемо множину $\mathbf{\Gamma}$, яка складається із ∇-нерухомих незвідних елементів:

$$\mathbf{\Gamma} = \{c \in \mathrm{C} \,|\, (x-c)^{\nabla} = u(x-c),\ u \in \mathrm{C}^*\}.$$

У праці [8] показано, що за інволюції (α) множина $\mathbf{\Gamma}$ − це уявна вісь комплексної площини, за інволюції (β) − початок координат, за інволюції (γ) − $\mathbf{\Gamma} = \mathrm{C}$. Якщо в кільці $\mathrm{C}[x, x^{-1}]$ визначена інволюція (ε), то $\mathbf{\Gamma}$ − це одиничне коло $|x| = 1$, під час інволюції (δ) − множина $\mathbf{\Gamma} = \varnothing$, а за інволюції (ς) − $\mathbf{\Gamma} = \{i; -i\}$.

Теорема 2. *Лінійне матричне рівняння (6), де* $A(x)$ − *унітальна матриця ненульового степеня із кільця* $M_{2n}(K)$, *має за довільної матриці* $C(x) \in M_{2n}(K)$ *єдиний розв'язок* $X(x)$, $Y(x)$, $\deg X(x) < \deg A(x)$, *тоді і тільки тоді, коли жодний корінь* $\det A(x)$ *не належить відповідній множині* $\mathbf{\Gamma}$.

Д о в е д е н н я. Зобразимо матрицю $A(x)$ із рівняння (6) у вигляді

$$A(x) = \begin{pmatrix} A_1(x) & A_2(x) \\ A_3(x) & A_4(x) \end{pmatrix},$$

де $A_i(x) \in M_n(\mathrm{K})$. Тоді

$$A(x)^{\#} = \begin{pmatrix} A_4(x)^{\nabla} & -A_2(x)^{\nabla} \\ -A_3(x)^{\nabla} & A_1(x)^{\nabla} \end{pmatrix}.$$

Обчисливши добуток $\begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix} A(x)^{\#} \begin{pmatrix} O & -E \\ E & O \end{pmatrix}$, де E − одинична матриця порядку n, бачимо, що

$$\begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix} A(x)^{\#} \begin{pmatrix} O & -E \\ E & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_4(x)^{\nabla} & -A_2(x)^{\nabla} \\ -A_3(x)^{\nabla} & A_1(x)^{\nabla} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & -E \\ E & O \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -A_3(x)^{\nabla} & A_1(x)^{\nabla} \\ -A_4(x)^{\nabla} & A_2(x)^{\nabla} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & -E \\ E & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1(x)^{\nabla} & A_3(x)^{\nabla} \\ A_2(x)^{\nabla} & A_4(x)^{\nabla} \end{pmatrix} = A(x)^{\nabla}.$$

Тому

$$\det A(x)^{\#} = \det A(x)^{\nabla}. \tag{8}$$

Якщо $K = C[x]$, знову застосуємо леми 7.1 та 7.2 із праці [9], зважаючи на те, що матриця $A(x)^{\#}$ або унітальна, або регулярна зі старшим коефіцієнтом $A_0 = -E$, і лінійне матричне рівняння (6) має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$(\det A(x), \det A(x)^{\#}) = 1.$$

Враховуючи рівність (8), бачимо, що ця умова рівносильна рівності

$$(\det A(x), \det A(x)^{\nabla}) = 1. \tag{9}$$

Якщо $K = C[x, x^{-1}]$, то, домноживши обидві частини рівняння (6) на оборотну над кільцем $C[x, x^{-1}]$ матрицю Ex^l, одержимо матричне рівняння, для якого виконується умова (9).

Застосовуючи теорему 2 із праці [1] та теорему 6 із [3], одержуємо, що умова (9) виконується, якщо жодний корінь $\det A(x)$ не належить відповідній множині $\mathbf{\Gamma}$. Теорему доведено.

Зауваження. За тотожної інволюції (γ) у кільці $C[x]$ із рівняння (6) одержуємо неперервне рівняння Ляпунова [5]. Тому рівняння (6) можна вважати його узагальненням у відповідних кільцях з інволюцією.

1. *Зеліско В.Р.* Матриці та матричні рівняння над кільцями многочленів з інволюцією // Прикл. проблеми механіки і математики. − 2010. − Вип. **8** − С. 18−22.
2. *Зеліско В.Р., Кучма М.І.* Зв'язок між різними типами інволюцій у кільцях матриць // Там же. − 2009. − Вип. **7** − С. 57−61.
3. *Зеліско В.Р., Кучма М.І.* Симетричні матриці та матричні рівняння над кільцем квазімногочленів з інволюцією // Там же. − 2013. − Вип. **11.** − С. 45−51.
4. *Зеліско В.Р., Сенькусь Л.Р.* Про інволюції в кільцях матриць // Вісн. Львівськ. ун-ту. Сер. мех.-мат. − 1998. − Вип. **49** − С. 42−45.
5. *Икрамов Х.Д.* Численное решение матричных уравнений. − М.: Наука, 1984. − 190 с.
6. *Казімірський П.С.* Розклад матричних многочленів на множники. − К.: Наук. думка, 1981. − 224 с.
7. *Ланкастер П.* Теория матриц. − М.: Наука, 1978. − 280 с.
8. *Любачевский Б.Д.* Факторизация симметрических матриц с элементами из кольца с инволюцией // Сибирский мат. журн. − 1973. − **14,** № 2. − С. 337−356.
9. *Петричкович В.* Узагальнена еквівалентність матриць і їх наборів та факторизація матриць над кільцями. − Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2015. − 312 с.
10. *Drensky I., Vesselin S., Grianbruno A.* On the ∗ − polynomial identities of minimal degree for matrices with involution // Bull. Un. Math. Ital. − 1995. − A(7) 9, № 3 − P. 471−482.
11. *Roth W.E.* The equation $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices // Proc. Amer. Math. Soc. − 1952. − № 3. − P. 392−396.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЕДИНСТВЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ НАД КОЛЬЦАМИ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Найдены условия существования единственных решений линейных матричных уравнений типа Сильвестра над кольцами комплексных многочленов и квазимногочленов с симплектической и смешанной инволюциями.

ON THE EXISTENCE OF UNIQUE SOLUTIONS OF LINEAR MATRIX EQUATIONS OVER RINGS WITH INVOLUTION

We found the conditions of the existence of unique solutions of linear matrix equations of Sylvester type over the ring of complex polynomials and quasipolynomials with symplectic and mixed involutions.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів
Нац. ун-т "Львівська політехніка", Львів

Одержано
15.09.15