

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТОНКОГО ДИСКА

При исследовании методом малого параметра возможной потери устойчивости быстровращающегося кругового тонкого диска конечной постоянной толщины выяснена зависимость между скоростью вращения и радиусом пластической зоны. На основе условия текучести Сен-Венана характеристическое уравнение получено в первом приближении по малому параметру. Найдена критическая угловая скорость вращения при различных параметрах диска.

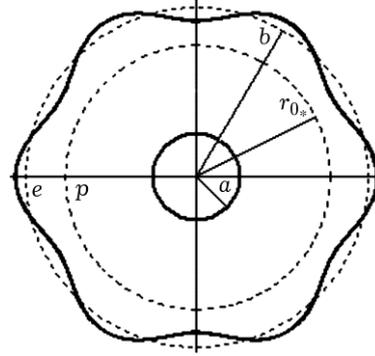
Введение. Для упругого кругового кольца или трубы, подвергаемых внутреннему давлению, не существует критической нагрузки [4, 5]. Пока они пребывают в упругом состоянии, круговая форма равновесия при внутреннем давлении всегда устойчива [10]. К потере устойчивости приводит сингулярное упругопластическое состояние [1]. Выявлено [11–14], что такое состояние во вращающихся дисках достигается перегрузкой центробежными растягивающими усилиями. Критическая сила (критическая скорость вращения), при достижении которой начальная круговая форма упругопластического диска может смениться новой равновесной плоской формой, определяется приближенно в рамках аналитического метода возмущений [14, 9]. Коэффициенты соответствующего характеристического уравнения [14, 7, 8], построенного на основе линеаризованных по малому параметру граничных условий в напряжениях, зависят от основного (невозмущенного) состояния диска и вида его возмущенного состояния.

К настоящему времени основные задачи о потере устойчивости дисков [11, 13, 15, 20, 16, 21] решены аналитически в предположении о реализации обобщенного плоского напряженного состояния [18] применительно к тонким пластинам [1, 2] (назовем это подходом 2). Попытка отказаться от условия малости толщины сделана в публикации [13] в связи с расчетом исчезновения несущей способности вращающегося диска с эксцентричной формой потери устойчивости. Поскольку это осуществлено только для возмущенного состояния диска, тогда как невозмущенное принимается обобщенным плоским, результаты в этой модели получены с некоторой погрешностью. Поэтому необходимо разграничить допущения о возможном напряженном (деформированном) состоянии вращающихся тонких дисков и полноте соответствующих решений, используемых в асимптотических представлениях.

Цель настоящей работы – применить в расчетах возможной потери устойчивости вращающихся круговых тонких дисков одно из трех допустимых решений уравнений равновесия и уравнений связи плоской теории упругости, в частности «неполное решение» [19] (подход 1), пригодное для неплоских дисков. «Более полное решение» [17, 18, 22] (подход 3), содержащее кроме радиальной и угловой координат также аппликату z , используется для изучения потери устойчивости дисков в дальнейших исследованиях.

Постановка задачи. Рассмотрим вращающийся однородный и изотропный сплошной/кольцевой круговой тонкий диск постоянной толщины (см. рисунок). Предел текучести материала диска σ_s , модуль упругости E , плотность γ , коэффициент Пуассона ν . Вместе с диском вращается цилиндрическая система координат. Система координат неподвижна относительно диска, причем срединная плоскость диска принята за плоскость $r\theta$ радиальной и угловой координат, а его ось – за ось аппликату z . Постоянная угловая скорость вращения равна ω .

Основания диска считаем свободными от внешних напряжений и предполагаем также, что внешние радиальные напряжения, приложенные к внутренней боковой поверхности $r = a$ (кольцевой диск), параллельны основаниям и распределены симметрично относительно срединной плоскости (по принципу Сен-Венана каждая совокупность таких напряжений статически эквивалентна силе, приложенной на середине высоты и расположенной в срединной плоскости). То же предполагаем для сил инерции. Наружная боковая поверхность $r = b$ свободна от внешних усилий.



Конечная толщина диска $2h$ достаточно мала, имеет место осевая симметрия, поэтому, во-первых, повсюду $\sigma_{zz} = 0$ [18], во-вторых, для усредненных по толщине касательных напряжений имеем $\sigma_{zr} = \sigma_{r\theta} = 0$ и, в-третьих, поле средних значений невозмущенных радиального и окружного напряжений определим из уравнения квазистатического равновесия

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = -\frac{\sigma}{b^2}r, \quad \sigma = \gamma b^2 \omega^2, \quad (1)$$

а также условия совместности [2]

$$r \left(\frac{d\sigma_{rr}}{dr} - (m-1) \frac{d\sigma_{\theta\theta}}{dr} \right) + m(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0, \quad m = \nu^{-1}, \quad (2)$$

в упругой зоне и условия текучести

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_s \quad (3)$$

– в пластической.

Возмущенное состояние упругой области диска

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_{rr}^0 + \delta \sigma'_{rr} + \delta^2 \dots, & \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\theta\theta}^0 + \delta \sigma'_{\theta\theta} + \delta^2 \dots, \\ \sigma_{r\theta} &= \sigma_{r\theta}^0 + \delta \sigma'_{r\theta} + \delta^2 \dots, & u &= u^0 + \delta u' + \delta^2 \dots, & v &= v^0 + \delta v' + \delta^2 \dots \end{aligned}$$

находим с учетом того, что линеаризованные по малому параметру δ возмущения первого порядка малости (обозначены штрихом) удовлетворяют дифференциальные уравнения равновесия плоской задачи [9]

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0$$

и уравнения связи между напряжениями и перемещениями в частных производных [2]

$$E \frac{\partial u}{\partial r} = \sigma_{rr} - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{\theta\theta}, \quad E \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) = \sigma_{\theta\theta} - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{rr},$$

$$\frac{E(1-\nu)}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) = \sigma_{r\theta}.$$

Исследуем характерные критические величины потери устойчивости диска, когда уравнение внешней его границы с точностью до бесконечно малых первого порядка имеет вид [12]

$$r = b + d \cos n\theta, \quad d = \text{const}, \quad n \in \mathbb{N},$$

или

$$\rho = 1 + \delta \cos n\theta, \quad (4)$$

где $\rho = r/b$ – безразмерный текущий радиус. Необходимо получить в первом приближении по малому параметру характеристическое уравнение для критического радиуса пластической зоны $r_0 = r_{0*}$ и определить соответствующую критическую угловую скорость вращения $\omega = \omega_*$. Для этого нужно установить условие существования нетривиальных решений системы линейных однородных уравнений [11, 14]

$$\begin{aligned} \sigma'_{rr} + \frac{d\sigma_{rr}^0}{dr} u' &= 0, & \sigma'_{r\theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta}^0 - \sigma_{rr}^0}{b} \frac{du'}{d\theta} &= 0, & r &= b, \\ \sigma'_{rr} &= 0, & \sigma'_{r\theta} &= 0, & r &= r_0 \end{aligned} \quad (5)$$

(линеаризованные по малому параметру δ граничные условия в напряжениях).

Самоуравновешивающаяся форма сплошного диска. Пусть $a=0$, а $n \in \{2, 3, \dots\}$. Интегрируя уравнение (1) с учетом (3) и условия $\sigma_{rr}(0) = \sigma_{\theta\theta}(0)$ в центре, отнесенное к σ_s радиальное напряжение в пластической зоне диска получаем в виде

$$\sigma_{rr} = 1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s} \rho^2. \quad (6)$$

Функции (3) и (6) подлежат сопряжению на окружности $\rho = \beta_0 := r_0/b$ с решениями

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= c(1 + \rho^{-2}) + \frac{\sigma}{8(1-\nu)\sigma_s} (3 - 2\nu - (2\nu + 1)\rho^2), \\ \sigma_{rr} &= c(1 - \rho^{-2}) + \frac{(3 - 2\nu)\sigma}{8(1-\nu)\sigma_s} (1 - \rho^2) \end{aligned} \quad (7)$$

в упругой зоне [19, 16]. Непрерывность радиальных усилия и смещения при переходе через упругопластическую границу в данном случае эквивалентна непрерывности радиального и окружного напряжений [20], поэтому

$$\begin{aligned} c(1 + \beta_0^{-2}) + \frac{\sigma}{8(1-\nu)\sigma_s} (3 - 2\nu - (2\nu + 1)\beta_0^2) &= 1, \\ c(1 - \beta_0^{-2}) + \frac{(3 - 2\nu)\sigma}{8(1-\nu)\sigma_s} (1 - \beta_0^2) &= 1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s} \beta_0^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} c &= \frac{(2\nu + 1)\beta_0^4}{3(3 - 2\nu) - (2\nu + 1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2}, \\ x := \frac{\sigma}{24\sigma_s} = \frac{\omega^2}{24q^2} &= \frac{1 - \nu}{3(3 - 2\nu) - (2\nu + 1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2}, & q &= \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\sigma_s}{\gamma}}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} A_1 &:= \frac{d\sigma_{rr}^0(1)}{d\rho} = \frac{(2\nu + 1)\beta_0^4 - 6(3 - 2\nu)}{3(3 - 2\nu) - (2\nu + 1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2}, \\ A_2 &:= \sigma_{\theta\theta}^0(1) - \sigma_{rr}^0(1) = \frac{(2\nu + 1)\beta_0^4 + 6(1 - 2\nu)}{3(3 - 2\nu) - (2\nu + 1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2} \end{aligned} \quad (9)$$

(ср. с [11, 13]).

Возмущенное состояние, приводящее к потере устойчивости исследуемого диска по сценарию (4), можно считать инициированным малыми возмущениями, вид которых определен решениями соответствующих дифференциальных уравнений для неподвижной упругой кольцевой пластины, нагруженной гармоническими усилиями на контуре. Анализ этих зависимостей [1, 2] свидетельствует, что

$$\begin{aligned}\sigma'_{rr} &= (nA\rho^{n-2} + nB\rho^{-n-2} + (n-2)C\rho^n + (n+2)D\rho^{-n})\cos n\theta, \\ \sigma'_{r\theta} &= (-nA\rho^{n-2} + nB\rho^{-n-2} - nC\rho^n + nD\rho^{-n})\sin n\theta, \\ u' &= \frac{\sigma_s}{E} \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{n}{n-1} A\rho^{n-1} - \frac{n}{n+1} B\rho^{-n-1} + \frac{n-2+4\nu}{n+1} C\rho^{n+1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{n+2-4\nu}{n-1} D\rho^{-n+1} \right) \cos n\theta\end{aligned}\quad (10)$$

(ср. с [20, 16, 21]), где u' – возмущение радиального смещения, отнесенное к b . Теперь из соотношений (5), (9), (10) можно получить линейную однородную систему $S(\beta_0)y=0$, $y=(A, B, C, D)^T$, и искомое характеристическое уравнение

$$\det S(\beta_0) = 0, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned}s_{11} &= n + A_1 \frac{\sigma_s}{E} \frac{1}{1-\nu} \frac{n}{n-1}, & s_{12} &= n - A_1 \frac{\sigma_s}{E} \frac{1}{1-\nu} \frac{n}{n+1}, \\ s_{13} &= n - 2 + A_1 \frac{\sigma_s}{E} \frac{1}{1-\nu} \frac{n-2+4\nu}{n+1}, & s_{14} &= n + 2 - A_1 \frac{\sigma_s}{E} \frac{1}{1-\nu} \frac{n+2-4\nu}{n-1}, \\ s_{21} &= -1 + A_2 \frac{\sigma_s}{E} \frac{1}{1-\nu} \frac{n}{n-1}, & s_{22} &= 1 - A_2 \frac{\sigma_s}{E} \frac{1}{1-\nu} \frac{n}{n+1}, \\ s_{23} &= -1 + A_2 \frac{\sigma_s}{E} \frac{1}{1-\nu} \frac{n-2+4\nu}{n+1}, & s_{24} &= 1 - A_2 \frac{\sigma_s}{E} \frac{1}{1-\nu} \frac{n+2-4\nu}{n-1}, \\ s_{31} &= n\beta_0^{n-2}, & s_{32} &= n\beta_0^{-n-2}, & s_{33} &= (n-2)\beta_0^n, & s_{34} &= (n+2)\beta_0^{-n}, \\ s_{41} &= -\beta_0^{n-2}, & s_{42} &= \beta_0^{-n-2}, & s_{43} &= -\beta_0^n, & s_{44} &= \beta_0^{-n}.\end{aligned}$$

Полагая в (11), к примеру, $\nu=1/2$, получаем характеристическое уравнение для несжимаемого материала диска:

$$\begin{aligned}1 + \frac{4n}{n^2-1} \frac{\sigma_s}{E} \left\{ \frac{\beta_0^4 - 3}{3 - \beta_0^2(2 - \beta_0^2)} \frac{n\beta_0^{2n-2} + 1 - \beta_0^{4n} - n\beta_0^{2n+2}}{2(n^2-1)\beta_0^{2n} - n^2\beta_0^{2n+2} - n^2\beta_0^{2n-2} + 1 + \beta_0^{4n}} + \right. \\ \left. + \frac{\beta_0^4}{3 - \beta_0^2(2 - \beta_0^2)} \frac{n^3\beta_0^{2n+2} - 1 - 2n(n^2-1)\beta_0^{2n} + \beta_0^{4n} + n(n^2-2)\beta_0^{2n-2}}{2(n^2-1)\beta_0^{2n} - n^2\beta_0^{2n+2} - n^2\beta_0^{2n-2} + 1 + \beta_0^{4n}} \right\} = 0\end{aligned}$$

(ср. с [11, 12, 14]).

Эксцентричная форма сплошного диска. Как и ранее, $a=0$, но при этом в (4) $n=1$. С учетом уравновешивающей силы, сосредоточенной в центре диска, возмущенное состояние при потере устойчивости обеспечивается за счет возмущений напряжений и смещений следующего вида:

$$\sigma'_{rr} = (2A\rho + (3m-2)B\rho^{-1} - 2C\rho^{-3})\cos\theta,$$

$$\begin{aligned}\sigma'_{r0} &= (2A\rho - (m-2)B\rho^{-1} - 2C\rho^{-3})\sin\theta, \\ u' &= \frac{\sigma_s}{E} \frac{1}{m-1} \left((m-4)A\rho^2 + m(3m-4)B\ln\rho + mC\rho^{-2} \right) \cos\theta.\end{aligned}\quad (12)$$

Использование вместо (10) зависимостей (12) приводит на основе соотношений (5) и (9) к характеристическому уравнению

$$\begin{vmatrix} 2 + A_1 \frac{\sigma_s}{E} \frac{m-4}{m-1} & 3m-2 & -2 + A_1 \frac{\sigma_s}{E} \frac{m}{m-1} \\ 2 + A_2 \frac{\sigma_s}{E} \frac{m-4}{m-1} & -(m-2) & -2 + A_2 \frac{\sigma_s}{E} \frac{m}{m-1} \\ 2\beta_0 & -(m-2)\beta_0^{-1} & -2\beta_0^{-3} \end{vmatrix} = 0, \quad (13)$$

которое при $\nu = 1/2$ преобразуется к виду

$$\frac{\sigma_s}{E} \frac{2\beta_0^5}{3 - \beta_0^2(2 - \beta_0^2)} - \beta_0 = 0. \quad (14)$$

Очевидным корнем уравнения (14) является $\beta_{0*} = 0$. Ему по формуле (8) соответствует относительная критическая угловая скорость $\omega_* / q = \sqrt{2}$. Напомним, что при реализации в этом случае подхода 2 «первая критическая скорость» равна $\sqrt{16/7}$ [11], т.е. превышает $\sqrt{2}$.

Кольцевой диск. Предположим, что на внутреннем контуре диска $r = a$ может создаваться дополнительное радиальное давление p , пропорциональное квадрату угловой скорости. Пусть, к примеру,

$$p = \frac{1}{3} \gamma \omega^2 \frac{b^3 - a^3}{a}.$$

Чтобы получить характеристическое уравнение (11), нужно учесть, что в этом случае при реализации подхода 1 соотношения (8) и (9) необходимо заменить следующими:

$$\begin{aligned}c &= \frac{2(2\nu+1)\beta_0^4 - 8(1-\nu)\beta^3\beta_0 - 3\beta\beta_0(3-2\nu - (2\nu+1)\beta_0^2)\xi(\beta_0)}{6(3-2\nu) - 2(2\nu+1)(2-\beta_0^2)\beta_0^2 - 8(1-\nu)\beta^3\beta_0^{-1}(1+\beta_0^2)}, \\ x &= \frac{(1-\nu)(2 + \beta\beta_0^{-1}(1+\beta_0^2)\xi(\beta_0))}{6(3-2\nu) - 2(2\nu+1)(2-\beta_0^2)\beta_0^2 - 8(1-\nu)\beta^3\beta_0^{-1}(1+\beta_0^2)}, \\ \xi(\beta_0) &= -\frac{3(3-2\nu) - (2\nu+1)(2-\beta_0^2)\beta_0^2 - 8(1-\nu)\beta^{-1}(\beta^3-1) - 4(1-\nu)\beta^3\beta_0^{-1}(1+\beta_0^2)}{3(3-2\nu) - (2\nu+1)(2-\beta_0^2)\beta_0^2 - 4(1-\nu)\beta_0^{-1}(2\beta^3-1)(1+\beta_0^2)}, \\ A_1 &= 2c - \frac{6(3-2\nu)x}{1-\nu}, \quad A_2 = A_1 + 24x\end{aligned}$$

(ср. с [16]). Здесь $\beta = a/b$, а $\xi \equiv -1$, если дополнительное внутреннее давление отсутствует.

Числовые примеры и обсуждение результатов. Для завершения сравнительного анализа результатов решения поставленной задачи применительно к сплошному тонкому диску приведем (см. таблицу) значения критического радиуса пластической зоны и относительной критической скорости, если $n \in \{2, 3, \dots\}$ при $\nu = 1/2$ и $\sigma_s/E = 0.01$ (ср. с [11]). С учетом замечания о «первой критической скорости» отсюда получаем такой обоб-

щающий вывод: применение подхода 1 к расчету возможной потери устойчивости вращающегося диска дает количественно отличающиеся числовые результаты от полученных с помощью подхода 2. Наблюдающееся небольшое понижение расчетной критической нагрузки позволяет сформулировать заключение, содержащее два конкурирующих предположения. Первое состоит в том, что использующийся в исследовании устойчивости вращающихся дисков при радиальном растяжении приближенный подход Лейбензон-Ишлинского [14, 6] не противоречит (в двухмерном случае) инженерным и физическим соображениям и не превышает критическую нагрузку до значений, превышающих эйлерову [3, 22]. Действительно, в противном случае подход 1 как более грубый в определенном смысле и базирующийся по сути на предположении о плоском деформированном состоянии, применимым, главным образом, к длинным вращающимся цилиндрам, например, вращающимся валам, должен был привести к результатам, превышающим полученные за подходом 2. Второе предположение таково: исследуемая плоская форма потери устойчивости неплюских дисков более точно описывается обобщенным плоским напряженным состоянием, примененным к нетонким пластинам согласно [17]. Оба эти положения представляют самостоятельный исследовательский интерес.

n	2	3	4	5	6
β_{0*}	0.7120	0.8388	0.8918	0.9204	0.9381
ω_* / q	1.6355	1.6952	1.7141	1.7220	1.7258

1. Бицено К. Б., Граммель Р. Техническая динамика: в 2-х т. – Москва; Ленинград: Гостехтеориздат, 1950. – Т. 1. – 900 с.
2. Бицено К. Б., Граммель Р. Техническая динамика: в 2-х т. – Москва; Ленинград: Гостехтеориздат, 1952. – Т. 2. – 640 с.
3. Гузь А. Н. О построении трехмерной теории устойчивости деформируемых тел // Прикл. механика. – 2001. – **37**, № 1. – С. 3–44.
То же: Guz A. N. Constructing the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, No. 1. – P. 1–37.
4. Гузь А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – Киев: Виц. шк., 1986. – 506 с.
5. Гузь А. Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1971. – 276 с.
6. Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии (обзор) // Прикл. механика. – 2012. – **48**, № 3. – С. 3–78.
То же: Guz A. N. Stability of elastic bodies under uniform compression (review) // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, № 3. – P. 241–293.
7. Гузь А. Н., Бабич И. Ю. Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с.
8. Гузь А. Н., Бабич И. Ю. Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек. – Киев: Виц. шк., 1980. – 168 с.
9. Гузь А. Н., Немши Ю. Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. – Киев: Виц. шк., 1989. – 352 с.
10. Динник А. Н. Продольный изгиб. Кручение. – Москва: Изд-во АН СССР, 1955. – 392 с.
11. Еришов Л. В., Ивлев Д. Д. О потере устойчивости вращающихся дисков // Изв. АН СССР. Отделение техн. наук. – 1958. – № 1. – С. 124–125.
12. Ивлев Д. Д. Механика пластических сред: в 2-х т. – Т. 2: Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. – Москва: Физматлит, 2002. – 448 с.
13. Ивлев Д. Д. О потере несущей способности вращающихся дисков, близких к круговому // Изв. АН СССР. Отделение техн. наук. – 1957. – № 1. – С. 141–144.

14. *Ивлев Д. Д., Еришов Л. В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. – Москва: Наука, 1978. – 208 с.
15. *Лула Д. М., Мартынюк А. А.* О неустойчивости вращающегося упругопластического составного плоского кругового диска // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55**, № 1. – С. 145–158.
То же: *Lila D. M., Martyniuk A. A.* On instability of a rotating elastoplastic composite plane circular disk // J. Math. Sci. – 2013. – **190**, № 6. – P. 804–822.
16. *Лула Д. М., Мартынюк А. А.* Развитие неустойчивости вращающегося упругопластического кольцевого диска // Прикл. механика. – 2012. – **48**, № 2. – С. 127–136.
То же: *Lila D. M., Martyniuk A. A.* Development of instability in a rotating elastoplastic annular disk // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, № 2. – P. 224–233.
17. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. – Москва: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1955. – 492 с.
18. *Ляв А.* Математическая теория упругости. – Москва; Ленинград: Объединенное научн.-техн. изд-во НКТП СССР, 1935. – 674 с.
19. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 708 с.
20. *Lila D. M., Martyniuk A. A.* Analysis of dynamics of boundary shape perturbation of a rotating elastoplastic radially inhomogeneous plane circular disk: Analytical approach // Appl. Math. – 2012. – **3**, № 5. – P. 451–456.
21. *Lila D. M., Martyniuk A. A.* Stability loss of rotating elastoplastic discs of the specific form // Appl. Math. – 2011. – **2**, № 5. – P. 579–585.
22. *Timoshenko S. P., Goodier J. N.* Theory of elasticity. – New York: McGraw-Hill, 1934. – 415 p.
То же: *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.

ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНА НЕСТІЙКІСТЬ ТОНКОГО ДИСКА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ

Під час дослідження методом малого параметра можливої втрати стійкості кругового тонкого диска скінченної постійної товщини, що обертається, встановлено залежність між швидкістю обертання і радіусом пластичної зони. На основі умови текучості Сен-Венана характеристичне рівняння одержано у першому наближенні за малим параметром. Знайдено критичну кутову швидкість обертання за різних параметрів диска.

ELASTO-PLASTIC INSTABILITY OF THIN ROTATING DISC

Possible loss of stability of a rotating circular thin disk of finite constant thickness is investigated with the help of the small parameter method. The relationship between rotational velocity and radius of the plastic zone was established. Based on the Saint-Venant yield condition a characteristic equation is obtained in a first approximation with respect to the small parameter. The values of critical angular rotational velocity are found for different parameters of the disc.