

ПРО ОДИН ПІДХІД, ПОВ'ЯЗАНИЙ З ДОСЛІДЖЕННЯМ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З ТРІЩИНОЮ ЗА ЗГИНУ З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ

Запропоновано підхід до дослідження напружено-деформованого стану кусково-однорідної ізотропної пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною, перпендикулярною до межі поділу матеріалів, береги якої під дією згинальних моментів на нескінченності гладко контактують в смугі сталої ширини поблизу однієї з основ пластини. З використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язок задачі зведено до системи лінійних алгебричних рівнянь відносно коефіцієнтів розв'язання комплексних потенціалів у відповідні ряди. Числовий аналіз виявив добру збіжність та стійкість числової схеми реалізації запропонованого підходу за довільного наближення тріщини до межі поділу матеріалів. У часткових випадках числові результати збігаються з відповідними літературними, отриманими іншим шляхом.

Пластинчасті елементи конструкцій широко використовують в інженерній практиці. Вони можуть складатися із різних матеріалів і містити тріщини, які виникають як під час виготовлення, так і експлуатації конструктивного елемента. Нижче запропоновано підхід до дослідження напружено-деформованого стану кусково-однорідної ізотропної пластини з прямолінійною межею поділу матеріалів та тріщиною, перпендикулярною до цієї межі, за її згину розподіленими згинальними моментами на нескінченності. Прийнято, що береги тріщини гладко контактують у смугі сталої ширини поблизу однієї з основ пластини. За їх контакту по лінії на одній з основ пластини розв'язок задачі зведено до сингулярного інтегрального рівняння [2], яке розв'язано числово методом механічних квадратур.

Формулювання задачі. Дослідимо задачу про згин кусково-однорідної ізотропної пластини завдовжки $2h$, яка складається з двох спаяних між собою півплощин за наявності в одній із них прямолінійної тріщини завдовжки $2l$, перпендикулярної до межі поділу матеріалів, береги якої вільні від зовнішнього навантаження, а на межі поділу виконуються умови ідеального механічного контакту. Під дією згинальних моментів на нескінченності $M_{x_j}^\infty$ і M_y^∞ береги тріщини починають гладко контактувати у смугі сталої ширини поблизу верхньої основи пластини (рис. 1).

У серединній площині пластини виберемо декартову систему координат $Oxy\bar{z}$, направивши вісь Ox по лінії поділу матеріалів, яку позначимо через L , а вісь Oy – по прямолінійній тріщині, причому центр тріщини знаходиться на віддалі d від осі Ox . На тріщині розмістимо локальну систему координат $O_1x_1y_1$ з початком у її центрі, направивши вісь O_1x_1 уздовж тріщини. Півплощину, для якої $y > 0$ ($y < 0$), позначимо через S_1 (S_2), а величинам, які відносяться до півплощини S_j , припишемо індекс j . Відрізок дійсної осі O_1x_1 , для якої $|x_1| < l$, позначимо через L_1 .

Через контакт берегів тріщини сформульовану задачу розіб'ємо на дві взаємопов'язані: плоску задачу теорії пружності та задачу згину, де скористаємося класичною теорією згину пластин.

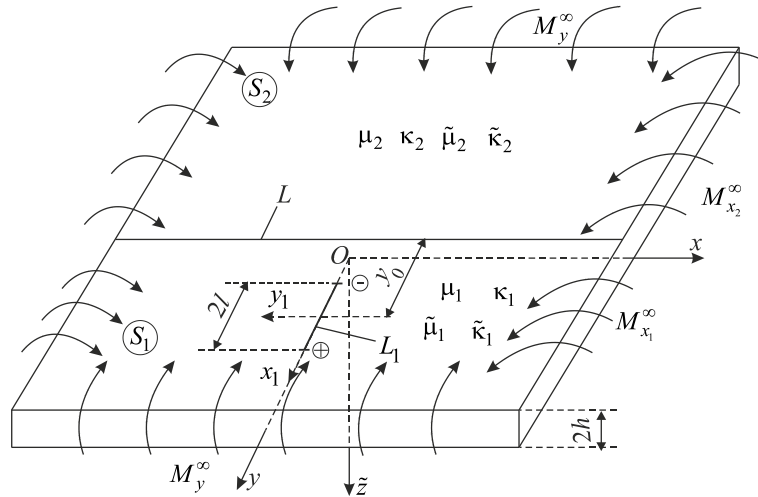


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини.

Запишемо крайові умови задачі:
на межі поділу матеріалів

$$(u + iv)^+ = (u + iv)^-, (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^+ = (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^-, \quad x \in L, \quad (1)$$

$$M_y^+ = M_y^-, H_{xy}^+ = H_{xy}^-, \quad x \in L,$$

$$Q_y^+ = Q_y^-, w^+ = w^-, \partial_y w^+ = \partial_y w^-, \quad x \in L, \quad (2)$$

на берегах тріщини [3]

$$\sigma_{x_1 y_1}^\pm = 0, \quad \sigma_{y_1 y_1}^\pm = -N/2h, \quad x_1 \in L_1, \quad (3)$$

$$M_{y_1}^\pm = M_y, \quad P^\pm = 0, \quad x_1 \in L_1, \quad (4)$$

$$M_y = h\beta N, \quad [\tilde{v}_1] + \alpha h \partial_{y_1} [w] = 0, \quad x_1 \in L_1, \quad (5)$$

де

$$\alpha = 0.5 \left(1 + (1 - \gamma)^2 \right), \quad \beta = 1 - \gamma/3, \quad \gamma = h_1/h,$$

h_1 – ширина області контакту; σ_{yy} , σ_{xy} – компоненти тензора напружень; u , v і \tilde{v}_1 – проекції вектора переміщень відповідно на осі Ox , Oy і Oy_1 у плоскій задачі; M_y , H_{xy} – згинальний і крутний момент; Q_y – перерізувальна сила; P – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила; N – контактне зусилля між берегами тріщини; значками "+" і "-" позначено граничне значення відповідної величини, коли z прямує до L_1 чи L відповідно, якщо $y_1 \rightarrow \pm 0$ чи $y \rightarrow \pm 0$; $\partial_y = \partial/\partial y$, $i = \sqrt{-1}$, $[f] = f^+ - f^-$, w – прогин пластини.

Побудова розв'язку задачі. Під час розв'язування плоскої задачі теорії пружності введемо в розгляд комплексні потенціали Колосова–Мусхелішвілі [1] $\Phi_{P_j}(z)$ і $\Psi_{P_j}(z)$ для кожної півплощини і подамо їх у вигляді

$$\Phi_{P_j}(z) = \Phi_P(z) + \Phi_P^{(j)}(z), \quad \Psi_{P_j}(z) = \Psi_P(z) + \Psi_P^{(j)}(z), \quad (6)$$

де $\Phi_P^{(j)}(z)$ і $\Psi_P^{(j)}(z)$ – голоморфні в області S_j функції, які зникають на нескінченності, а функції $\Phi_P(z)$ і $\Psi_P(z)$ запишемо так:

$$\begin{aligned}\Phi_P(z) &= -0,5(\tilde{z}^2 - 1)^{-1/2} \sum_{k=1}^{\infty} y_k / \left(\tilde{z} + \sqrt{\tilde{z}^2 - 1} \right)^k, \\ \Psi_P(z) &= -0,5il^{-1}z(\tilde{z}^2 - 1)^{-3/2} \sum_{k=1}^{\infty} y_k \left(\tilde{z} + k\sqrt{\tilde{z}^2 - 1} \right) / \left(\tilde{z} + \sqrt{\tilde{z}^2 - 1} \right)^k, \\ \tilde{z} &= -(d + iz)/l, \quad z = x + iy, \quad y_k - \text{невідомі дійсні коефіцієнти.}\end{aligned}\quad (7)$$

Якщо аналітично продовжити функцію $\Phi_P^{(j)}(z)$ із області S_j в область S_{3-j} за формулою

$$\Phi_P^{(j)}(z) = -\bar{\Phi}_P^{(j)}(z) - z\bar{\Phi}_P^{(j)}(z) - \bar{\Psi}_P^{(j)}(z), \quad (8)$$

то для визначення напружено-деформованого стану пластини можемо записати залежності

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} &= \Phi_P(z) + \Phi_P^{(j)}(z) + R_j(z), \\ 2\mu_j \partial_x(u + iv) &= \kappa_j \left(\Phi_P(z) + \Phi_P^{(j)}(z) \right) - R_j(z),\end{aligned}\quad (9)$$

де $\kappa_j = (3 - \nu_j) / (1 + \nu_j)$; μ_j - модуль зсуву;

$$R_j(z) = \overline{\Phi_P(z)} + z\overline{\Phi_P'(z)} + \overline{\Psi_P(z)} + \Phi_P^{(j)}(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_P^{(j)}(z)}.$$

Введемо функції

$$\begin{aligned}\theta(z) &= \Phi_P^{(1)}(z) + \Phi_P^{(2)}(z), \quad z \in S_1 \cup S_2, \\ \Phi(z) &= \mu_{3-j}\kappa_j\Phi_P^{(j)}(z) - \mu_j\Phi_P^{(3-j)}(z), \quad z \in S_j.\end{aligned}\quad (10)$$

Враховуючи (10), (9) та задовольняючи умови ідеального механічного контакту (1), отримаємо задачі лінійного спряження, розв'язавши які, знайдемо:

$$\begin{aligned}\theta(z) &= 0, \quad z \in S_1 \cup S_2; \\ \Phi(z) &= \begin{cases} A_1 A_4 \left(\bar{\Phi}_P(z) + z\bar{\Phi}_P'(z) + \bar{\Psi}_P(z) \right), & z \in S_1, \\ -A_2 A_3 \Phi_P(z), & z \in S_2, \end{cases}\end{aligned}\quad (11)$$

де $A_j = \mu_j + \mu_{3-j}\kappa_j$, $j = 1, 2$, $A_3 = A_2^{-1}(\mu_1\kappa_2 - \mu_2\kappa_1)$, $A_4 = A_1^{-1}(\mu_2 - \mu_1)$.

Беручи до уваги першу залежність (11), на підставі (10) отримаємо:

$$\Phi_P^{(j)}(z) = \begin{cases} A_j^{-1}\Phi(z), & z \in S_j, \\ -A_{3-j}^{-1}\Phi(z), & z \in S_{3-j}. \end{cases}\quad (12)$$

Під час дослідження напруженого стану, пов'язаного зі згином пластини, введемо комплексні потенціали $\Phi_{3j}(z)$ і $\Psi_{3j}(z)$, які подамо у вигляді

$$\Phi_{3j}(z) = \Phi_3(z) + \Phi_3^{(j)}(z) + \Gamma_j, \quad \Psi_{3j}(z) = \Psi_3(z) + \Psi_3^{(j)}(z) + \Gamma'_j, \quad (13)$$

де

$$\Gamma_j = -\frac{M_{xj}^{\infty} + M_y^{\infty}}{4D_j(1 + \nu_j)}; \quad D_j = \frac{2E_j h^3}{3(1 - \nu_j^2)}; \quad \tilde{\kappa}_j = \frac{3 + \nu_j}{1 - \nu_j};$$

$$\Gamma'_j = \tilde{\mu}_j(M_y^{\infty} - M_{xj}^{\infty}); \quad \tilde{\mu}_j = \left[2D_j(1 - \nu_j) \right]^{-1};$$

$$\Phi_3(z) = -0,5(\tilde{z}^2 - 1)^{-1/2} \sum_{k=1}^{\infty} x_k / \left(\tilde{z} + \sqrt{\tilde{z}^2 - 1} \right)^k; \quad (14)$$

$$\Psi_3(z) = -\frac{1}{2\sqrt{\tilde{z}^2 - 1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\kappa_1 + 1)x_k}{\left(\tilde{z} + \sqrt{\tilde{z}^2 - 1} \right)^k} - \frac{iz}{2l} \frac{1}{(\tilde{z}^2 - 1)^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k \left(\tilde{z} + k\sqrt{\tilde{z}^2 - 1} \right)}{\left(\tilde{z} + \sqrt{\tilde{z}^2 - 1} \right)^k},$$

$\Psi_3(z)$, $\Phi_3(z)$ – голоморфні в області S_j функції, що зникають на нескінченності; x_k – невідомі дійсні сталі.

Скористаємося залежностями [4]

$$2\tilde{\mu}_j(-M_y + i \int P dx) = \tilde{\kappa}_j \Phi_{3j}(z) - \tilde{R}_j(z), \quad (15)$$

$$\partial_x(\partial_x w + i\partial_y w) = \Phi_{3j}(z) + \tilde{R}_j(z),$$

де

$$\tilde{R}_j(z) = \overline{\Phi_{3j}(z)} + z \overline{\Phi'_{3j}(z)} + \overline{\Psi_{3j}(z)}.$$

Зауважимо, що, виходячи з другої умови (5), отримуємо:

$$y_k = \tilde{\alpha} h x_k, \quad (16)$$

де

$$\tilde{\alpha} = -\frac{(1 + \tilde{\kappa}_1)\alpha}{(1 + \kappa_1)(1 + \nu_1)}.$$

Аналітично продовжимо функцію $\Phi_3^{(j)}(z)$ із області S_j в область S_{3-j} за формулою, аналогічною до (8), замінивши індекс P на 3 , та введемо функції

$$\theta_3(z) = \Phi_3^{(1)}(z) + \Phi_3^{(2)}(z), \quad z \in S_1 \cup S_2,$$

$$\tilde{\Phi}_3(z) = \tilde{\mu}_{3-j} \tilde{\kappa}_j \Phi_3^{(j)}(z) - \tilde{\mu}_j \Phi_3^{(3-j)}(z), \quad z \in S_j. \quad (17)$$

Із порівняння (10) і (17) бачимо, що вони за структурою однакові, тому, виходячи з умов ідеального механічного контакту по лінії спаю (2) та формул (15), подібно, як це зроблено в плоскій задачі, отримаємо задачі лінійного спряження для визначення функцій $\theta_3(z)$ і $\tilde{\Phi}_3(z)$, розв'язавши які, можна записати явний вигляд для функцій $\Phi_3^{(j)}(z)$, подібний до (12).

Маючи вирази для комплексних потенціалів плоскої задачі теорії пружності і задачі згину пластини через невідомі коефіцієнти x_k чи y_k , можемо знайти вирази для $\sigma_{y_1 y_1}^{\pm}$ та $M_{y_1}^{\pm}$ через комплексні потенціали, та N і M_y – через ці потенціали, користуючись формулами

$$N = -h(\sigma_{y_1 y_1}^+ + \sigma_{y_1 y_1}^-), \quad M_y = 0,5(M_{y_1}^+ + M_{y_1}^-).$$

Підставляючи отримані вирази для N і M_y у першу крайову умову (5), матимемо систему лінійних алгебричних рівнянь для знаходження x_k :

$$\frac{\pi \tilde{B}_0}{2} x_n^* + \sum_{k=1}^M x_k^* S_{kn} = \frac{\pi}{2} \delta_{1n}, \quad n = \overline{1, M}, \quad (18)$$

де

$$x_k^* = \frac{x_k E_1 h^3}{M_{x_1}^{\infty}}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad \tilde{B}_0 = \frac{\tilde{\kappa}_1 c_1}{2} - c_2, \quad c_1 = \frac{4}{3(1 + \nu_1)},$$

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{2\alpha\beta}{(1-\nu_1)}, \quad \tilde{B}_1 = \frac{c_1}{4} \left[\tilde{A}_4 (\tilde{\kappa}_1^2 - 4) - \tilde{A}_3 \right] - \frac{c_2}{2} (A_3 + 3A_4), \\ \tilde{B}_2 &= 3(2A_4c_2 + \tilde{A}_4c_1), \quad \tilde{B}_3 = -2(2c_2A_4 + \tilde{A}_4c_1), \\ \tilde{A}_3 &= \frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\mu}_2\tilde{\kappa}_1}{\tilde{A}_2}, \quad \tilde{A}_4 = \frac{\tilde{\mu}_2 - \tilde{\mu}_1}{\tilde{A}_1}, \quad \tilde{A}_j = \tilde{\mu}_j + \tilde{\mu}_{3-j}\tilde{\kappa}_j, \end{aligned} \quad (19)$$

$$S_{kn} = \sum_{m=1}^N \frac{1}{N+1} \sin \frac{\pi m}{N+1} \sin \frac{\pi n m}{N+1} f_k(t_m), \quad t_m = \cos \frac{\pi m}{N+1},$$

$$\begin{aligned} f_k(u) &= (-1)^k \left(2\tilde{B}_1\rho^4(u) + 2\tilde{B}_2\tilde{a}(\tilde{b} + k\rho(u))\rho^2(u) + \right. \\ &\left. + \tilde{B}_3\tilde{a}^2(1 + 2\tilde{b}^2 + k\rho(u)(3\tilde{b} + k\rho(u))) \right) / \left(2\rho^5(u)(\tilde{b} + \rho(u))^k \right), \end{aligned}$$

$$N = 2M, \quad \rho(u) = \sqrt{\tilde{b}^2 - 1}, \quad \tilde{b} = u + 2d, \quad \tilde{a} = u + d.$$

Знаючи x_k , можемо знайти контактне зусилля між берегами тріщини:

$$\begin{aligned} N^* &= \frac{hN}{M_{x1}^\infty} = 2\tilde{\alpha}_1 \sum_{k=1}^M x_k^* \left\{ U_{k-1}(u) + (-1)^k \left(2D_1\rho^4(u) + 2D_2\tilde{a}(\tilde{b} + k\rho(u)) \times \right. \right. \\ &\left. \left. \times \rho^2(u) + D_3\tilde{a}^2(1 + 2\tilde{b}^2 + k\rho(u)(3\tilde{b} + k\rho(u))) \right) \times \left(2\rho^5(u)(\tilde{b} + \rho(u))^k \right)^{-1} \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

де $U_{n-1}(x) = \sin(n \arccos x) / \sqrt{1-x^2}$, $\tilde{\alpha}_1 = \alpha / (1-\nu_1)$,

$$D_1 = 0.5(A_3 + 3A_4), \quad D_2 = -6A_4, \quad D_3 = 4A_4.$$

Зведені коефіцієнти інтенсивності моментів K_{i3}^* та зусиль k_i^* визначимо за формулою

$$K_{13}^{*\pm} - iK_{23}^{*\pm} = (K_{13}^\pm - iK_{23}^\pm) / (M_{x1}^\infty \sqrt{l}) = \pm \frac{2}{3} \frac{3 + \nu_1}{1 - \nu_1^2} \sum_{k=1}^M (\pm 1)^k x_k^*, \quad (21)$$

$$k_1^{*\pm} - ik_2^{*\pm} = h(k_1^\pm - ik_2^\pm) / (M_{x1}^\infty \sqrt{l}) = \pm \frac{\alpha}{1 - \nu_1} \sum_{k=1}^M (\pm 1)^k x_k^*,$$

де знак "+" відповідає дальній вершині тріщини, а "-" – ближній відносно межі поділу матеріалів.

Зауважимо, що між згинальними моментами на нескінченності існує залежність

$$M_{x2}^\infty E_2^{-1} - M_{x1}^\infty E_1^{-1} = M_y^\infty (\nu_2 E_2^{-1} - \nu_1 E_1^{-1}). \quad (22)$$

Крім того, коефіцієнти інтенсивності зусиль k_i^* зв'язані із коефіцієнти інтенсивності моментів залежністю

$$k_1^{*\pm} = \alpha K_{13}^{*\pm} (1 + \nu_1) / (3 + \nu_1). \quad (23)$$

Критичний момент, коли тріщина поширюватиметься, обчислимо за формулою [2]

$$\tilde{M} = \frac{M_{x1}^\infty}{2h^2} \sqrt{\frac{\pi l}{2\gamma_* E_1}} = \frac{3 + \nu_1}{\sqrt{6(1 + \nu_1)(3 + 2\nu_1)}} \min \{ K_{13}^{*\pm} \}^{-1}, \quad (24)$$

де γ_* – густина активної поверхневої енергії матеріалу пластини.

Числовий аналіз задачі. Числово аналізували задачу для $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ і $\gamma = h_1/h = 0,13$ (рис. 2, 3 та таблиця).

На рис. 2 побудовано залежність зведеного контактного зусилля $N^* = Nh/M_{x_1}^\infty$ між берегами тріщини від безрозмірної координати $\xi = x_1/l$ за різних значень $\tilde{d} = d/l$ та $\tilde{\beta} = \lg E_2/E_1$. Як бачимо, характер цього зусилля залежить від відносної жорсткості складових півплощини пластини: якщо $\tilde{\beta} < 0$, воно у ближній вершині є більшим, ніж у дальній, а при $\tilde{\beta} > 0$ – навпаки.

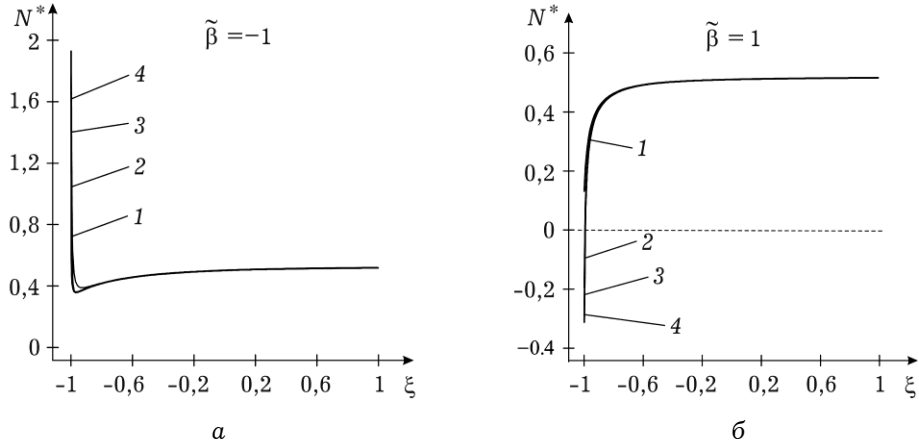


Рис. 2. Залежність контактної зусилля від безрозмірної координати за різних значення \tilde{d} :

1 – $\tilde{d} = 1,01$; 2 – 1,001; 3 – 1,0001; 4 – 1,00001.

M	\tilde{y}	$\tilde{\beta}$	K_1^+	ΔK_1^+	K_1^-	ΔK_1^-
25	1,01	-0,5	0,830523800		0,546313833	
50	1,01	-0,5	0,829507603	0,001016196	0,546371633	-0,000057800
100	1,01	-0,5	0,829482469	0,000025135	0,546369525	0,000002108
200	1,01	-0,5	0,829482465	0,000000003	0,546369525	0,000000000
400	1,01	-0,5	0,829482465	0,000000000	0,546369525	0,000000000
800	1,01	-0,5	0,829482465	0,000000000	0,546369525	0,000000000
25	1,001	-0,5	1,106511899		0,551280564	
50	1,001	-0,5	1,136341129	-0,029829231	0,549486248	0,001794316
100	1,001	-0,5	1,135513592	0,000827537	0,549592889	-0,000106641
200	1,001	-0,5	1,134865765	0,000647828	0,549578606	0,000014284
400	1,001	-0,5	1,134862073	0,000003692	0,549578503	0,000000103
800	1,001	-0,5	1,134862073	0,000000000	0,549578503	0,000000000
25	1,0001	-0,5	1,252079488		0,554471975	
50	1,0001	-0,5	1,439319733	-0,187240245	0,548416999	0,006054977
100	1,0001	-0,5	1,544028997	-0,104709264	0,549901565	-0,001484567
200	1,0001	-0,5	1,563895039	-0,019866042	0,550296260	-0,000394695
400	1,0001	-0,5	1,561128395	0,002766644	0,550294417	0,000001843
800	1,0001	-0,5	1,560868822	0,000259574	0,550292373	0,000002044

У таблиці для тих самих параметрів, що і на рис. 2, наведено значення зведених коефіцієнтів інтенсивності моментів $K^{\pm} = K_{13}^{\pm} / (M_{x1}^{\infty} \sqrt{l})$ за різних значень M кількості членів у розвиненні (7) і (14) та подана похибка dK^{\pm} під час їх обрахування, коли кількість членів у цих розвиненнях подвоюється.

На рис. 3 подано залежність зведеного критичного моменту \tilde{M} від відносної відстані \tilde{y} тріщини до межі поділу матеріалів. Як бачимо, критичний момент \tilde{M} зростає зі збільшенням β . Крім того, зменшується зі зростанням відстані \tilde{y} , коли тріщина знаходиться у півплощині з меншим модулем пружності, і підвищується в протилежному випадку.

Висновки. Досліджено згин кусково-однорідної ізотропної пластини з прямолінійною межею поділу матеріалів та за наявності перпендикулярної до неї тріщини, береги якої гладко контактують у смугі сталої ширини поблизу однієї з основ пластини під дією розподілених згинальних моментів на нескінченності. Запропоновано підхід до подання комплексних потенціалів плоскої задачі теорії пружності та класичної теорії згину пластин у вигляді розвинень за спеціальними функціями, причому їх коефіцієнти визначено із системи лінійних алгебричних рівнянь. Цей підхід дає можливість числово проаналізувати механічні параметри задачі за невеликої відстані вершини тріщини від межі поділу матеріалів; коли потрібно змінювати формулювання задачі; в якій вершині тріщини руйнуватиметься пластинка; у граничних випадках отримаємо відомі результати для кусково-однорідної пластини з однією тріщиною, коли контакт відбувається по лінії поблизу однієї з її основ, та для однієї тріщини в однорідній пластині [5]. Його можна застосувати для дослідження напружено-деформованого стану пластинчастих елементів конструкцій за наявності тріщин не тільки за згину, але й за розтягу.

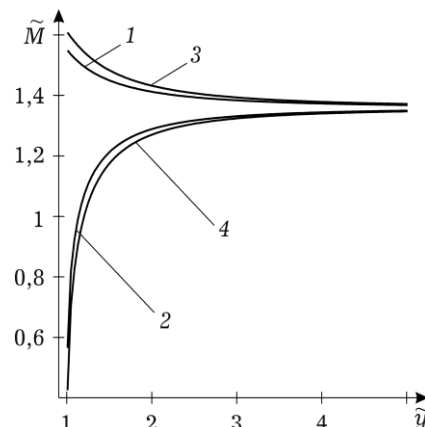


Рис. 3. Залежність критичного моменту \tilde{M} від відносної відстані \tilde{y} тріщини від межі поділу матеріалів за різних значень β :
1 - 1; 2 - -1; 3 - 2; 4 - -2.

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966. - 708 с.
2. Опанасович В., Звізло І. Згин кусково-однорідної пластини з тріщиною, перпендикулярною до лінії поділу матеріалів, з урахуванням контакту берегів // Регіональний міжвуз. зб. наук. праць "Системні технології". - 2002. - Вип. 4 (21). - С. 124-129.
3. Опанасович В. К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь // Наук. нотатки Луцьк. техн. ун-ту. - 2007. - Вип. 20 (2). - С. 123-127.
4. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит. - Минск: Изд-во Белорусского ун-та, 1962. - 200 с.
5. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки. - 1988. - № 7. - С. 49-51.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ, СВЯЗАННОМ С ИССЛЕДОВАНИЕМ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНОЙ ПРИ ИЗГИБЕ С УЧЕТОМ ШИРИНЫ ОБЛАСТИ КОНТАКТА ЕЕ БЕРЕГОВ

Предложен подход к исследованию напряженно-деформированного состояния кусочно-однородной изотропной пластины со сквозной прямолинейной трещиной, перпендикулярной границе раздела материалов, берега которой под действием изгибающих моментов на бесконечности гладко контактируют по области постоянной ширины вблизи одной из основ пластины. С использованием методов теории функций комплексного переменного и комплексных потенциалов решение задачи сведено к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения комплексных потенциалов в соответствующие ряды. Численный анализ подтвердил хорошую сходимость и устойчивость числовой схемы реализации предложенного подхода при произвольном приближении трещины к границе раздела материалов. В частных случаях численные результаты совпадают с соответствующими литературными, полученными другим методом.

ON ONE APPROACH RELATED TO THE STUDY OF THE STRESS-STRAIN STATE OF PIECEWISE HOMOGENEOUS ISOTROPIC PLATE WITH A CRACK UNDER BENDING CONSIDERING THE WIDTH OF THE CONTACT AREA OF ITS FACES

An approach to the study of stress-strain state of piecewise homogeneous isotropic plate with rectilinear through crack perpendicular to the interface of the materials the faces of which under the action of the bending moments at infinity come in a smooth contact along the area of constant width close to one of the bases of the plate is proposed. Using the methods of the theory of functions of a complex variable and complex potentials the solution to the problem is reduced to a system of linear algebraic equations for the coefficients of expansion of the complex potentials in the corresponding series. Numerical analysis has shown good convergence and stability of the numerical scheme of implementation of the proposed approach as the crack approaches arbitrarily the interface of the materials. In particular cases, the numerical results agree with the ones in the literature obtained by other methods.

¹Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

²Академія сухопутних військ
імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів