

ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ В РІВНОМІРНО НАГРІТІЙ КОМПОЗИТНІЙ ПЛАСТИНІ-СМУЗІ З УРАХУВАННЯМ ПОДАТЛИВОСТІ ДО ТРАНСВЕРСАЛЬНОГО СТИСНЕННЯ

Наведено співвідношення уточненої теорії термопружності для податливої до трансверсальних зсуву та стиснення пластини-смузи. За рівномірного нагріву, коли видовжені краї жорстко защемлені, отримано аналітичні вирази для температурних напружень. Порівняно їх значень за неявного та явного врахування податливості до стиснення з класичним результатом.

Вступ. Визначенню та дослідженню температурних напружень у тонкостінних елементах конструкцій присвячено чимало праць, зокрема фундаментальні монографії [1–6]. Однак використовувані для цього теорії пластин і оболонок не дають можливості врахувати одну з основних властивостей деформування тонкостінних елементів конструкцій зі сучасних армованих композитів на полімерній основі – податливість до трансверсального стиснення [7].

Нижче на основі співвідношень уточненої теорії пластин знайдено аналітичні вирази для температурних напружень у рівномірно нагрітій пластині-смузі за неявного та явного врахування податливості до трансверсального стиснення. Визначені коефіцієнти впливу порівняно з класичним результатом.

Формулювання задачі. Розглянемо трансверсально-ізотропну прямокутну пластину товщиною $2h$, один із тангенціальних розмірів якої значно перевищує інший. Тоді її термопружний стан описують уточненими [8]

рівняннями рівноваги

$$N' = 0, \quad M' - Q'_0 = 0, \quad Q'_0 = 0, \quad Q'_0 - 6\sigma_3^0 = 0; \quad (1)$$

співвідношеннями термопружності

$$\begin{aligned} N &= \bar{B}(e_1^0 + \lambda e_3^0) - N_T, \quad M = \bar{D}e_1^1 - M_T, \\ Q_0 &= \Lambda \cdot 2\varepsilon_{13}^0, \quad Q_1 = \frac{3}{4}\Lambda \cdot 2\varepsilon_{13}^1, \\ \sigma_3^0 &= \frac{5}{6}E_0[e_3^0 + \lambda e_1^1 - (2\lambda\alpha_T + \alpha'_T)T_0]; \end{aligned} \quad (2)$$

деформаційними співвідношеннями

$$e_1^0 = u', \quad \bar{e}_1^1 = \gamma', \quad 2e_{13}^0 = \gamma + w', \quad e_{13}^1 = w'_1. \quad (3)$$

У рівностях (1)–(3) вжиті загальноприйняті позначення для розтягувального N , перерізувального Q_0 та стискувального Q_1 зусиль і згинного моменту M ; компонент тензора напружень σ_{ij} , переміщень u точок серединної площини в тангенціальному напрямку x_1 , кута повороту γ нормального до серединної площини елемента перед деформуванням; переміщення w точок серединної площини вздовж нормальної координати x_3 , переміщення w_1 точок лицьових площин уздовж нормальної координати, поздовжньої ε_1^0 та згинної $\bar{\varepsilon}_1^1$ деформацій, трансверсальних деформацій зсуву ε_{13}^0 і

стиснення ε_{13}^1 , а також для введених жорсткісних характеристик: $\bar{B} = 2Eh(1 + \alpha) / (1 - \nu^2)$ – узагальненої жорсткості на розтяг, $\bar{D} = h^2 \bar{B} / 3$ – узагальненої згинної жорсткості, $\Lambda = 2k'hG'$ – зсувної жорсткості, $\alpha = (1 + \nu)(\nu')^2(E/E') / \delta^2$, $E_0 = E'(1 - \nu) / \delta^2$, $\delta^2 = 1 - \nu - 2(\nu')^2(E/E')$, $\lambda = \nu'(E/E') / (1 - \nu)$, E, ν – модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона в серединній та еквідистантній їй площинах; E', ν' – тих самих величин у перпендикулярній до серединної площини; G' – трансверсального модуля зсуву; температурних розтягувального $N_T = \bar{B}\beta_T T_0$ зусилля і згинного $M_T = \bar{D}\beta_T T_1 / h$ моменту, $T = T_0(x_1) + T_1(x_1)(x_3 / h)$ – температурного поля в пластині-смузі, α_0 і α_T – коефіцієнти лінійного температурного розширення в напрямках x_1 та x_3 відповідно, $\beta_T = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_T$, $k' = 14 / 15$.

Крайові умови на виводжених краях $x = \pm l$ пластини за жорсткого їх защемлення мають вигляд

$$u(\pm l) = 0, \quad w(\pm l) = 0, \quad w_1(\pm l) = 0, \quad \gamma(\pm l) = 0. \quad (4)$$

Рівняння (1) разом зі співвідношеннями (2), (3) і крайовими умовами (4) описують термопружний стан пластини-смуги, викликаний температурним полем T , і явно враховують податливість до трансверсальних зсуву та стиснення.

Відшукання розв'язку задачі. Розглянемо рівномірний нагрів пластини-смуги, тобто коли $T_0 = \text{const}$, а $T_1 = 0$. Очевидно, що тоді $w = 0$, $\gamma = 0$ і в пластині виникають лише (залежно від знака T_0) розтягувальні або стискувальні температурні напруження. Тут система розв'язувальних рівнянь після почергового підставлення (3) в (2) і результату – в (1) набуде вигляду при $\nu = \nu'$, $\alpha_T = \alpha'_T$, $E = E'$

$$u' + \lambda w_1 / h = C_1 / \bar{B} + \beta_T T_0, \quad (5)$$

$$w'' - \frac{20}{3} \frac{E_0}{\Lambda} (w_1 / h + \lambda u' - \beta_T T_0) = 0, \quad (6)$$

де константу C_1 слід визначити з крайових умов.

За явного врахування стиснення функція, що характеризує стиснення нормального елемента, задовольняє рівняння

$$w_1'' - \frac{k^2}{h^2} w_1 = k^2 \left[\frac{(1 - \nu)\nu}{(1 - 2\nu)h} \frac{C_1}{\bar{B}} - \frac{k^2}{h} (1 - \nu)\beta_T T_0 \right], \quad k^2 = \frac{20}{3} \frac{Eh}{\Lambda(1 - \nu^2)},$$

розв'язок якого має вигляд

$$w_1 = h \left[\frac{(1 - \nu)\nu}{1 - 2\nu} \frac{C_1}{\bar{B}} - (1 - \nu)\beta_T T_0 \right] \times [ch(kx / h) / ch(kl / h) - 1]. \quad (7)$$

Після підставлення (7) в (5) з подальшим інтегруванням і задоволенням крайових умов на функцію u можна знайти вираз для C_1 :

$$C_1 = - \frac{\bar{B}(1 + \nu)[(\lambda / k)(h / l)th(kl / h) - 1]}{(1 + \nu) - (\lambda / k)(h / l)th(kl / h)}. \quad (8)$$

Оскільки для ізотропного матеріалу $k^2 = \frac{50}{7} \frac{1}{1-\nu}$, то при $h/l \leq 0.2$ маємо $th(kl/h) \equiv 1$. З урахуванням цього факту для температурного напруження отримуємо вираз

$$\sigma_1 = \frac{E\alpha_T T_0}{1-\nu} \left[\frac{1 + (h/l)(\lambda/k)}{1 + (h/l)(\lambda/k)/(1+\alpha)} \right]. \quad (9)$$

Розглянемо випадок неявного врахування стиснення. Поклавши в рівності (5) $w_1/h = 0$, для температурного напруження отримаємо:

$$\sigma_i = -\frac{E\alpha_T T_0}{1-2\nu}. \quad (10)$$

Якщо при $E/E' = 0$, з (5) маємо:

$$\sigma_c = -\frac{E\alpha_T T_0}{1-\nu}. \quad (11)$$

Аналіз результатів. Напруження σ_1 і σ_i для порівняння виразимо через σ_c :

$$\sigma_1 = (1 + \eta)\sigma_c,$$

$$\nu_0 = [1 + (h/l)(\lambda/k)] / [(1 - (h/l)(\lambda/k)/(1+\alpha))],$$

$$\sigma_i = (1 + \frac{\nu}{1-2\nu})\sigma_c.$$

Очевидно, що

$$|\sigma_c| < |\sigma_1| < |\sigma_i|. \quad (12)$$

Висновки. Урахування податливості до стиснення як явного, так і неявного призводить до збільшення температурних напружень. Нерівність (12) справедлива для всіх реальних значень пружних характеристик матеріалу пластини-смуги. У подальшому цей результат можна порівняти з двовимірним точним та коректним числовим розв'язком для розглянутої задачі.

1. Крысько В. А. Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек. – Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1976. – 216 с.
2. Новацкий В. Вопросы термоупругости. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
3. Noda N., Hetnarski R. B., Tanigawa Y. Thermal stresses. –New York: Taylor&Francis, 2003. – 493 p.
4. Підстригач Я. С. Вибрані праці. – Київ: Наук. думка, 1995. – 460 с.
5. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. – К.: Наук. думка, 1978. – 344 с.
6. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 488 с.
7. Кубенко В. Д., Бабаев А. Э., Беспалова Е. И. и др. Динамика элементов конструкций. – К.: «А.С.К.», 1999. – Механика композитов: В 12 т. / Под общ. ред. акад. НАНУ А. Н. Гузя. – К.: Наук. думка, 1993–2003. – Т. 9. – 380 с.
8. Марчук М. В. Нелінійне деформування і коливання податливих трансверсальним деформаціям зсуву та стиснення пластин і оболонок // машинознавство. – 2005. – № 10. – С. 9–14.

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В РАВНОМЕРНО НАГРЕТОЙ КОМПОЗИТНОЙ ПЛАСТИНЕ-ПОЛОСЕ С УЧЕТОМ ПОДАТЛИВОСТИ К ТРАНСВЕРСАЛЬНОМУ СЖАТИЮ

Приведены соотношения уточненной теории термоупругости податливой к трансверсальному сжатию пластины-полосы. Для равномерного нагрева при жестко защемленных удлиненных краях получены аналитические выражения для температурных напряжений. Сравнены их значения при неявном и явном учете податливости к сжатию с классическим результатом.

THE THERMAL STRESSES IN AN EQUALLY HEATED COMPOSITE STRIP-PLATE INTO ACCOUNT THE PLIABLE TO TRANSVERSAL COMPRESSION

The relations of the refined theory of thermoelasticity for the strip-plate pliable to the transversal shear and compression are given. For the case of uniform heating at the edges rigidly fixed elongated, analytical expressions for thermal stresses are obtained. The comparison of their values implicitly and explicitly taking into account pliability to compression of the classical results is done.

Тернопільський нац. економічний ун-т, Тернопіль

Одержано
03.11.14