

**ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ШАРУВАТИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПАНЕЛЕЙ  
ЗА ДИНАМІЧНОГО НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ**

*Запропоновано підхід для знаходження скінченної кількості власних частот і форм геометрично нелінійних коливань шаруватих циліндричних панелей з довільною формою твірної за дискретного розгляду складових. Числові результати порівняно з раніше отриманими іншими авторами для колової твірної. Досліджено вплив кривизни на основну власну частоту п'ятишарової вуглепластикової панелі.*

**Вступ.** Гнучкі шаруваті циліндричні панелі – вагома частина різноманітних споруд і технічних засобів. Специфіка їх функціонального призначення часто зумовлює неканонічність форми твірної через унеможливлення знаходження аналітичних розв'язків у замкненому вигляді задач міцнісного розрахунку навіть у лінійно пружному формулюванні. Інтенсивні динамічні (зокрема, циклічні) навантаження, як правило, спричинені геометрично нелінійним напружено-деформованим станом. Суттєва відмінність фізико-механічних властивостей складових шарів зумовлює потребу дискретного розгляду будови за товщиною вище вказаних об'єктів, оскільки усереднений підхід може призвести до суттєвих похибок під час оцінки тримкої здатності чи визначення їхніх амплітудно-частотних характеристик. Тому необхідно розробити методики розрахунку параметрів динамічного геометрично нелінійного напружено-деформованого стану шаруватих циліндричних панелей з довільною формою твірної за дискретного розгляду шарів. Вільні коливання тонкостінних елементів конструкцій досліджували, або застосовуючи числові методи [4, 6–8], або лише враховуючи податливість до трансверсального зсуву [1]. Нижче досліджено поперечні вільні коливання для шаруватих панелей з урахуванням всіх фізико-механічних властивостей у просторовому формулюванні задачі.

**Формулювання задачі.** Розглянемо криволінійний шар товщиною  $h$  у циліндричній системі координат  $\alpha_1 = \varphi$ ,  $\alpha_2 = z$ ,  $\alpha_3 = r$ . Якщо розмір шару вздовж осі  $\alpha_2$  значно більший, ніж довжина дуги серединної поверхні, то маємо видовжену циліндричну панель (див. рис. 1).

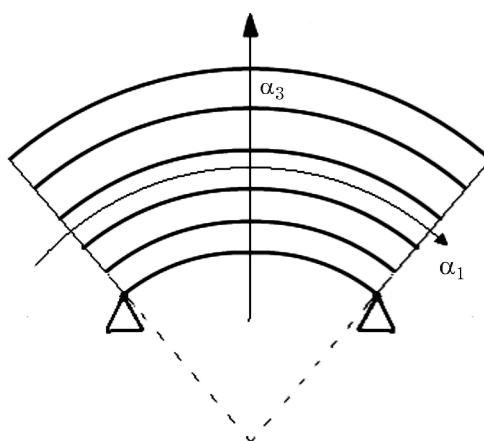


Рис. 1. Шарувата циліндрична панель з нерухомими шарнірами на видовжених краях.

Якщо умови закріплення торців панелі  $\alpha_1 = \pm\alpha_1^0$  та початкові не залежать від координати  $\alpha_2$ , то тоді, враховуючи мінімальний вплив крайових умов на  $\alpha_2 = \pm\alpha_2^0$ , розглядатимемо плоску задачу. У цьому випадку функції, що описують динамічний геометрично нелінійний напружено-деформований стан, залежать лише від координат  $\alpha_1, \alpha_3$ . Для відшукування цих функцій маємо [6]:

рівняння руху

$$\operatorname{div} \mathbb{S} = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}; \quad (1)$$

співвідношення пружності

$$\hat{\Sigma} = \tilde{A} \otimes \hat{\varepsilon}; \quad (2)$$

співвідношення між компонентами тензора деформацій  $\hat{\varepsilon}$  та вектора переміщень  $\vec{U} = u_i \vec{e}_i \vec{e}_j$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k); \quad (3)$$

співвідношення між компонентами  $S^{ij}$  несиметричного тензора напружень Кірхгофа  $\mathbb{S}$  та компонентами  $\sigma^{ik}$  симетричного тензора напружень Піоли  $\hat{\Sigma}$

$$S^{ij} = \sum_k \sigma^{ik} (\delta_k^j + \nabla_k u^j). \quad (4)$$

У рівняннях (1) та (2)  $\tilde{A}$  – тензор пружних характеристик анізотропного шару, а  $\rho$  – його густина.

За відсутності навантажень на лицьових поверхнях панелі  $\alpha_3 = \pm h / 2$  під час вільних коливань граничні умови набувають вигляду

$$S^{31}(\alpha_1, \pm h / 2, t) = S^{33}(\alpha_1, \pm h / 2, t) = 0, \quad |\alpha_1| \leq \alpha_1^0. \quad (5)$$

Розглянемо шарнірне закріплення на торцях циліндричної панелі  $\alpha_1 = \pm\alpha_1^0$  на нижній лицьовій поверхні  $\alpha_3 = -h / 2$ :

$$S^{1i}(\pm\alpha_1^0, \alpha_3, t) = 0, \quad |\alpha_3| \leq h / 2, \quad i = 1, 3, \quad (6)$$

$$u_i(\pm\alpha_1^0, -h / 2, t) = 0, \quad i = 1, 3. \quad (7)$$

Рівняння (1)–(4) разом з граничними умовами (5)–(7) описуватимуть геометрично нелінійні поперечні коливання панелі у площині  $\alpha_2 = 0$ .

Для однозначності розв'язку також задамо початкові умови:

$$u_i(\alpha_1, \alpha_3, t)|_{t=t_0} = v_i^0(\alpha_1, \alpha_3), \quad \left. \frac{\partial u_i(\alpha_1, \alpha_3, t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} = v_i^1(\alpha_1, \alpha_3), \quad i = 1, 3,$$

$$(\alpha_1, \alpha_3) \in \Omega = [-\alpha_1^0, \alpha_1^0] \times [-h / 2, h / 2]. \quad (8)$$

**Урахування шаруватості будови за товщиною.** До розглянутої вище задачі додамо умову шаруватості панелі. Нехай циліндрична панель складається з непарної кількості  $(2m + 1)$  шарів, симетрично розташованих відносно координатної поверхні  $\alpha_3 = 0$ , з однаковими товщиною та фізико-механічними характеристиками:

$$h_1 + h_2 + \dots + h_{2m+1} = h. \quad (9)$$

Вважаємо, що між шарами виконуються умови ідеального механічного контакту, тобто

$$u_i^{j-1}(\alpha_1, \tau_j, t) = u_i^j(\alpha_1, \tau_j, t), \quad j=2, 2m, \quad i=1, 3, \\ S_{j-1}^{3i}(\alpha_1, \tau_j, t) = S_j^{3i}(\alpha_1, \tau_j, t), \quad j=2, 2m, \quad i=1, 3, \quad (10)$$

де  $\tau_j$  – значення координати  $\alpha_3$  для верхньої лицьової поверхні  $j$ -го шару,  $u_i^j$  – переміщення  $j$ -го шару і  $S_j^{3i}$  – значення компонент тензора Кірхгофа для  $j$ -го шару [3].

**Дискретизована задача.** Диференціальне формулювання задачі про вільні геометрично нелінійні коливання еквівалентне поставі задачі мінімізації функціоналу  $L$  [8]:

$$L = - \sum_{k=1}^{2m+1} \int_{\Omega_k} \sum_i \sum_j S_k^{ij} \frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega_k} \rho_k \frac{\partial^2 U^{kT}}{\partial t^2} \cdot U d\Omega \rightarrow \min. \quad (11)$$

Граничні умови (5), (6), а також друга умова міжшарового контакту в (10) для варіаційного формулювання задачі є природними [8], а умови (7) та першу умову в (10) необхідно враховувати під час відшукання розв'язку.

Апроксимуємо невідомі переміщення  $u_1^j, u_3^j$  за поперечною координатою квадратичними поліномами [5], беручи до уваги те, що кожен шар є тонкостінним:

$$u_i^j(\alpha_1, \alpha_3) = \sum_{k=0}^2 u_{ik}^j(\alpha_1) p_k^j(\alpha_3), \quad \alpha_3 \in [\tau_j, \tau_{j+1}], \quad i=1, 3, \quad j=1, 2m+1, \quad (12)$$

де

$$p_0^j(\alpha_3) = \frac{1}{2} - \frac{2\alpha_3 - (\alpha_{j+1} + \tau_j)}{2(\tau_{j+1} - \tau_j)}, \quad p_1^j(\alpha_3) = \frac{1}{2} + \frac{2\alpha_3 - (\tau_{j+1} + \tau_j)}{2(\tau_{j+1} - \tau_j)}, \\ p_2^j(\alpha_3) = 1 - \left( \frac{2\alpha_3 - (\tau_{j+1} + \tau_j)}{\tau_{j+1} - \tau_j} \right)^2.$$

Використаємо ізопараметричні лінійні скінченні елементи для відшукання коефіцієнтів  $u_{ik}^j(\alpha_1)$  у (12) [8]:

$$u_{ik}^{j(e)}(\alpha_1) = \sum_{l=1}^2 u_{ikl}^{j(e)} \varphi_l^{(e)}(\xi), \quad \xi = \frac{2\alpha_1 - (\alpha_{12}^{(e)} + \alpha_{11}^{(e)})}{\alpha_{12}^{(e)} - \alpha_{11}^{(e)}}, \quad \alpha_1 \in [\alpha_{11}^{(e)}, \alpha_{12}^{(e)}], \quad (13)$$

де  $u_{ikl}^{j(e)} = u_{ik}^j(\alpha_{1l}^{(e)})$  – значення функцій переміщення у вузлових точках  $\alpha_{1l}^{(e)}$  ( $l=1, 2$ ) лінійного скінченного елемента  $e$ ;  $\varphi_1^{(e)}(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)$ ;  $\varphi_2^{(e)}(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi)$ .

Сформулюємо першу умову (10) для вузлових значень функцій:

$$u_{i0l}^{j(e)} = u_{i2l}^{j-1(e)}, \quad j=2, 2m, \quad l=1, 2, \quad i=1, 3. \quad (14)$$

Після підставлення (13) та (12) в (11) та врахування умови (14) отримаємо задачу мінімізації функціоналу:

$$L^\Delta = \{u\}^T K_L \{u\} + \{u\}^T K_{NL}(u) \{u\} + \{u\}^T M \{\ddot{u}\} \rightarrow \min, \quad (15)$$

де  $\{u\} = \{u\}(t)$  – вектор значень коефіцієнтів  $u_{ikl}^{j(e)}$  у точках скінченно-елементного розбиття відрізка  $[-\alpha_1^0, \alpha_1^0]$ ;  $K_L$  – лінійно залежить від вектора  $\{u\}$ , а  $K_{NL}$  – нелінійна складова матриці жорсткості;  $M$  – матриця жорсткості маси [8].

Матрицю  $K_{NL}$  подаємо у вигляді

$$K_{NL}(\{u\}(t)) = B(\{u\}(t)) \cdot \{u\}^T(t) \cdot B^T(\{u\}(t)), \quad (16)$$

а  $B(\{u\}(t))$  отримуємо інтегруванням в (11) членів, що є добутками частинних похідних переміщення  $u_i$  [6].

Мінімуму дискретизований функціонал (15) досягає в точці  $\{u\}(t)$ , де задовольняється рівняння

$$K_L(\{u\}(t)) + K_{NL}(\{u\}(t))\{u\}(t) + M(\{\ddot{u}\}(t)) = 0. \quad (17)$$

**Метод розв'язання.** Систему нелінійних рівнянь (17) розв'язуватимемо методом збурень [2]. Запишемо її у вигляді

$$K_L(\{u\}(t)) + \mu K_{NL}(\{u\}(t))\{u\}(t) + M(\{\ddot{u}\}(t)) = 0, \quad (18)$$

де  $\mu$  ( $0 \leq \mu \leq 1$ ) – параметр збурення. Розклавши шукані функції і матрицю жорсткості в ряд Тейлора, отримаємо систему матричних лінійних рівнянь:

$$M\{\ddot{u}\}_0(t) + K\{u\}_0(t) = 0, \quad (19)$$

$$M\{\ddot{u}\}_1(t) + K\{u\}_1(t) - K_{L1}(\{u\}_0(t)) + K_{NL}(\{u\}_0(t))\{u\}_0(t) = 0. \quad (20)$$

Після послідовного розв'язання її одержимо  $\{u\}(t) = \{u\}_0(t) + \{u\}_1(t)$ .

**Числові результати.** Розглянемо циліндричну п'ятишарову панель, краї якої закріплені нерухомими шарнірами на нижній лицьовій площині (див. рис. 1) з геометричними  $l = 1$  м;  $h = 0,01$  м та фізико-механічними характеристиками

$$E_1 = 40E_2, \quad G_{12} = G_{13} = 0,6E_2, \quad G_{23} = 0,5E_2, \quad \nu_1 = 0,25.$$

Таблиця 1

$n$	$\omega_n$
1	0.48524
2	1.12415
3	1.93678

Для аналізу достовірності результатів апробуємо описаний метод на задачі, розв'язки якої відомі [4]. Розглянемо циліндричну панель з радіусом кривизни  $K = 0$ . Для знаходження власних частот і значень застосуємо розбиття на 50 скінченних елементів по координаті  $\alpha_1$ . У табл. 1 подано перші три власні частоти  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  для розглянутої конструкції.

У табл. 2 порівняно отримані значення  $\omega_{NL} / \omega_L$  за амплітуди  $\frac{w_{\max}}{h}$  для вільних коливань п'ятишарової прямої панелі з результатами, наведеними раніше [4].

Таблиця 2

$\frac{w_{\max}}{h}$	$\omega_{NL} / \omega_L$	
	[3]	Метод збурень
0,2	1,0313	1,0401
0,4	1,1198	1,1214
0,6	1,2536	1,2695
0,8	1,4199	1,4418
1,0	1,6086	1,6588
1,2	1,8127	1,8627

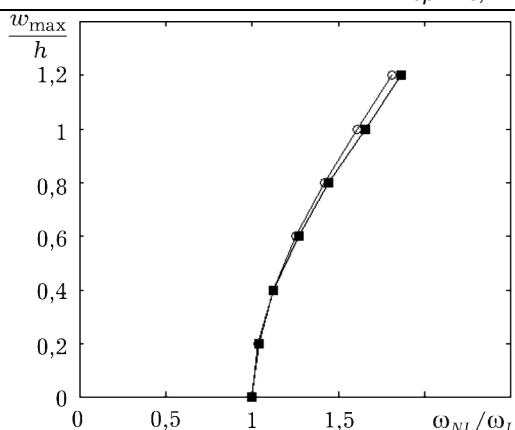


Рис. 2. Порівняння амплітудно-частотної характеристики, отриманої зі застосуванням методу збурень (■) та результатів праці [4] (○).

На рис. 2 зображено скелетні криві [1], побудовані за допомогою запропонованого методу та за результатами праці [4].

Досліджено також вплив радіуса кривизни  $K$  на вільні коливання панелі. Встановлено (рис. 3) залежність найменшої власної частоти від форми кривизни п'ятишарової панелі з вуглепластика.

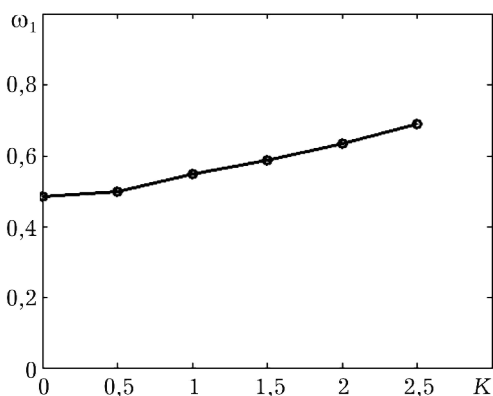


Рис. 3. Залежність найменшої власної частоти від радіуса кривизни циліндричної панелі.

**Висновки.** Максимальна відносна похибка у табл. 2 не перевищує 3%, що вказує на достовірність запропонованого методу. Порівняльний аналіз графіків на рис. 2 свідчить про достовірність результатів отриманих за допомогою розробленої методики. Також встановлено, що основна амплітуда власних коливань зростає зі збільшенням кривизни панелі.

У подальшому слід виконати аналогічні дослідження за різних фізико-механічних характеристик складників та умов закріплення видовжених торців шаруватих панелей.

1. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек . – М.: Наука, 1972. – 432 с.
2. Горячко Т. В., Пакош В. С. Метод збурень у задачі про вільні коливання анізотропних видовжених циліндричних панелей за геометрично нелінійного деформування // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2013. – Вип. 11. – С. 199–204.

3. Григоренко Я. М., Мукоєд А. П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. – К.: Вищ. шк., 1983. – 286 с.
4. Курпа Л. В., Будников Н. А. Исследование вынужденных нелинейных колебаний многослойных пологих оболочек при помощи многомодовой аппроксимации // Вісник Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 2013. – № 1. – С. 55–60.
5. Марчук М. В., Муха І. С., Горячко Т. В. Порівняльний аналіз характеристик геометрично нелінійного напружено-деформованого стану композитних пластин і циліндричних панелей на основі уточненої моделі та теорії пружності // Modelling and Stability: Abstracts of Conference Reports. – К.: Taras Shevchenko National Univ., 2011. – P. 301.
6. Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. – 374 p.
7. Amabili M. Nonlinear vibrations of rectangular plates with different boundary conditions: theory and experiments // Comput. Struct. – 2004. – **82**(31–32). – P. 2587–2605.
8. Reddy J. N. An introduction to nonlinear finite element analysis. – Oxford: Oxford University Press, 2004. – 488 p.

#### **СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СЛОИСТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НЕЛИНЕЙНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ**

*Предложен подход для нахождения конечного числа собственных частот и форм геометрически нелинейных колебаний слоистых цилиндрических панелей с произвольной формой образующей при дискретном рассмотрении составляющих. Числовые результаты сравнены с ранее полученными другими авторами для случая круговой образующей. Исследовано влияние кривизны на основную собственную частоту пятислойной углепластиковой панели.*

#### **FREE VIBRATIONS OF LAYERED CYLINDRICAL PANELS AT DYNAMIC NONLINEAR DEFORMATION**

*An approach to finding a finite number of natural frequencies and forms of geometrically nonlinear vibrations of laminated cylindrical panels with unoffical generatrix consideration for discrete components is proposed. Numerical results are compared with previously obtained by other authors for the case of angular generatrix. The effect of curvature on basic natural frequency five-layer coal-plastic panel.*